رقم المقرر: (١٠١ر)

وزارة التربية والتعليم
بالإشتراك مع
الجامعات المصرية
برنامج
تأهيل معلمى المرحلة الإبتدائية
للمستوى الجامعى

مقدمة فى تاريخ الرياضيات الحساب والجبر

تأليف

الدكتور عبد العظيم احمد انيس
استاذ الرياضيات بكلية العلوم
جامعة عين شمس

الدكتور وليم تاوضروس عبيد
استاذ ووكيل كلية التربية
جامعة عين شمس

طبعة ١٩٩٩ - ٢٠٠٠



مقدمة فى تاريخ الرياضيات
(العدد ـ الحساب ـ الجبر)

الاسلام مصر للطباعة

المحتوى

الاسلام مصر للطّباعة

تقـــديم

إن اهتمامنا بتدريس تاريخ الرياضيات هو اهتمام بنمـو الفـكر الانسانى ونزعته إلى الدقة فى التعبير وسلامة التفكير ووجود قـواعد موضوعية يستند إليها الانسان فى إثبات صحة ما يقوم به إلى جانب اهتمام الانسان بحل مشكلاته ومـواجهة احتيـاجاته واحتيـاجات المجتمع الذى يعيش فيه عن طريق كشف الأدوات المناسبة، وتكوين العلاقات الصحيحة التى تمكنه من التنبؤ بما قد يواجهه إلى جـانب حب البحث والكشف ودفع المعرفة الانسانية إلى آفاق جديدة.

إن دراسة تاريخ الرياضيات تعطى للـدارس فـرصة أن يتفهـم الأسباب وراء الكثير من الاجرائيات وطرق العمل التى يقوم بها عند إجراء عملية رياضية معينة، كما أنها تسمح للدارس بأن يتذوق ويقدر طبيعة الرياضـيات كمادة حية نامية، وأن يقدر العلمـاء الـرياضيين الذين سـاهموا فى ابتكارها، وأنه ـ أى الدارس ـ يمكن أيضـا أن يكون رياضيا ومكتشفا أو مبتكرا للمزيد من الأفكار الرياضية.

إن تكوين الحس التاريخى بـالاضافة إلـى التعـريف بمسار الرياضيات ذاتها والاستخدامات المختلفة لها هـو هدف أساسى مـن دراسة تاريخ الرياضيات.

وبالنسـبة للمعلم فإن النظرة التاريخية تمده بثراء مـن القصص الطريفة والطرق المختلفة لحل الكثير من المواقف الحياتية والمسائل الرياضية كما توسع مداركه وثقافته وتمكنه من المساهمة فى تـطوير مناهج الرياضيات بحيث لا يشغل نفسه فى أعمال وإجـرائيات آليـة عفى عليها الزمن، بل يتجه نحو الفكر الرياضى الصـحيح بـالمعنى المعاصر للرياضيات، وليس بمعناها التاريخى.

الاسلام مصر للطباعة

وبالاضافة إلى كل ذلك فلدينا فى بطون التاريخ الكثير من الأمجاد العلمية آن لنا أن نعرفها وأن نقول عنها لأبنائنا لتكون لهـم حـافزا ودافعا على الأخذ بالعلم والأساليب العلمية، وأن يكونوا مشاركين فى إنتاج العلم والتطور وليسوا مجرد مستهلكين أو متفرجين.

ولقد اعتمدنا فى مادة هذا الكتاب على مراجع عديدة أهمها:

- تاريخ الرياضيات (دافيد سميث)
- مقدمة فى تاريخ الرياضيات (هوارد ايفز)
- موضوعات تاريخية فى الرياضيات (مجلس معلمى الرياضيات الأمريكى)
- أصول الرياضيات (رايموند وايلدر)
- تراث العرب العلمى فى الرياضيات والفلك (قدرى حافظ طوقان)
- العلم عند العرب (ألدوميبلى)
- استخراج الأوتار فى الدائرة (البيرونى - تحقيق أحمد الدمرداش)
- ابن الهيثم (مصطفى نظيف)
- العلم والحضارة (عبد العظيم أنيس)
- علماء وأدباء ومفكرون (عبد العظيم أنيس)

ومع اعترافنا بتواضع الجهد الذى قمنا به فإننا نأمل أن نكون قد وفقنا وما التوفيق إلا من عند الله.

عبد العظيم أنيس - وليم عبيد

يناير ١٩٨٤

الاسلام مصر للطباعة

الفصل الأول

تطور العدد

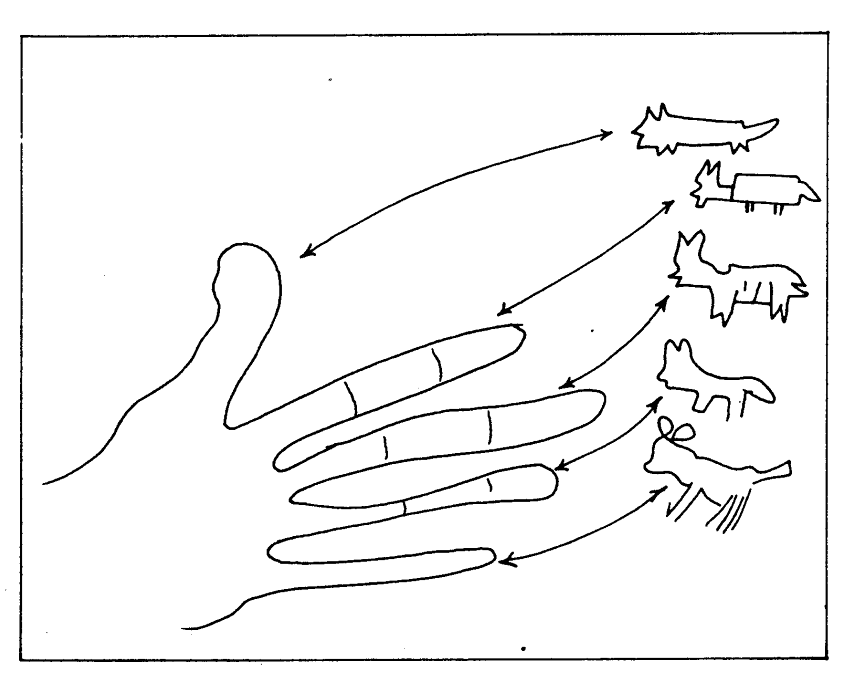
لعل الانسان هو الكائن الحى الوحيد على هذه الأرض الذى حباه الله القدرة على تنمية أسلوب منظم لتخزين المعلومات المفيدة ونقلها عبر الأجيال إن جزءا كبيرا من هذه المعلومات يتعلق بالشكل والكم – أى بأشكال الأشياء وهيئتها وبالمقادير والكميات – وكان لابد من وجود لغة للتعبير عن هذا الشكل وذلك الكم، وعن العلاقات التى تربط بينها... تلك هى الرياضيات فى جوهرها وفى أصولها التاريخية : دراسة العدد ودراسة الشكل. ويعتبر العدد اللبنة الأولى فى بناء علم الرياضيات.

ولم يظهر مفهوم العدد مرة واحدة ولكنه مر برحلة تطورية طويلة حتى نضج وأصبح بصورته الحالية. ولقد ساعدت الدراسات الانثروبولوجية – أى التى تهتم بالانسان القديم والبدائى – والدراسات التى تمت على القبائل البدائية المعاصرة فى الكشف عن المراحل التى مرت بها فكرة العدد. ويتفق العديد من المؤرخين على أن الانسان مر فى هذه الرحلة بثلاث مراحل أساسية هى : مرحلة الحصر، مرحلة العد، مرحلة العدد.

الحصر Enumeration :

ويقصد بذلك تلك المرحلة التى كان الانسان فيها يزاوج ما لديه من أشياء بمجموعة متواجدة فى بيئته أو حياته وذلك بمقابلة واحدة من الأشياء التى عنده بواحدة من عناصر المجموعة التى يقارن بها. فمثلا قد يحتفظ بسجل لعدد القطيع الذى كان يمتلكه بأن يخصص قطعة من الحصى لكل واحدة من القطيع، أو بأن يحفر علامة على

شجرة مناظرة لكل واحدة من القطيع، وكانت مجمـوعات المقـارنة عبارة عن مجموعات من الحصى أو علامات محفورة أو أجـزاء مـن جسم الانسان أو أوراق نبات معين. وفى هذه المرحلة لم تكن هنـاك لغة منطوقة للعناصر التى يقارن بها، كما لم يكن هناك وجود لمفهوم العدد فلم يكن هناك شيء اسمه ٢ أو ٣ مثلا.



شكل (١)

العـد Numeration :

مع ابتكار اللغة كان من الطبيعى أن يستخدم الانسان كلمات بدلا من الاشارة إلى عناصر مجموعات المقارنة مثل الاشارة إلى اصابع اليد المختلفة. ويمثل هذا انتقالا إلى مرحلة العد. ذلك أن الكلمات التى كانت تستخدم فى المزاوجة يمكن اعتبارها كلمات عددية لأن المزاوجة فى هذه المرحلة أصبحت مع كلمات مرتبة بحسب ترتيب العناصر التى يقارن بها. مثلا :

الأصبع الأصغر لليد اليسرى : قد تعنى ما نسميه الآن ١
اصبع الخاتم لليد اليسرى : قد تعنى ما نسميه الآن ٢
الاصبع الأوسط لليد اليسرى : قد تعنى ما نسميه الآن ٣
سبابه اليد اليسرى : قد تعنى ما نسميه الآن ٤
الابهام فى اليد اليسرى : قد يعنى ما نسميه الآن ٥
... وهكذا

ونلاحظ هنا أن الكلمات «العـددية» أشياء محسوسة ومرتبطة بالأشياء المعدودة وليست فكرة عقلية للمفهومات المجردة التى نعرفها الآن للأعداد ١، ٢، ٣، ٤،...

ووجود الكلمات العددية لا يعنى وجود مفهوم العدد ولكنها كانت مرحلة نحو هذا المفهوم.

العـدد Number :

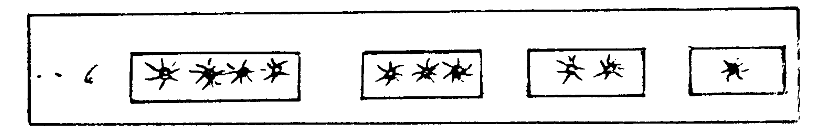
إن المقصود بالعدد هنا هو العدد الطبيعى ١، ٢، ٣، ٤، ... وهو العدد الذى نجيب به عن السؤال «كم؟» مثل : كم طفلا عندك؟ كم عدد تلاميذ الفصل؟ كم مدرسا فى المدرسة؟ كم عدد المسجلين فى هذا البرنامج؟...

ويطلق على مثل هذا العدد «العدد الكاردينالى». فعندما نحاول

الاسلام مصر للطباعة

أن نعرف عدد عناصر المجموعة التالية [*، *، *، *، *] مثلا نقوم بعملية عد كالآتى : ١، ٢، ٣، ٤، ٥ فيكون آخر عدد «٥» هو ما يدل على «كم» العناصر الموجودة فى المجموعة ويسمى «٥» فى هذه الحالة العدد الكاردينالى للمجموعة. والعدد الكاردينالى لمجموعة ما لا يتوقف على ترتيب عناصر المجموعة كما أنه مستقل عن طبيعة هذه العناصر.

ومن الناحية التاريخية فإن الانسان كان يعرف عدد مجموعة ما باستخدام مجموعات المقارنة كأن يقول مثلا أن لديه من القطيع بقدر اليد الواحدة (وهو ما نعنيه نحن بقولنا خمسة) أو بقدر «رجل كامل» (وهو ما نعنيه نحن بقولنا عشرين وهو مجموع اصابع اليدين والقدمين). وتلى ذلك وجود مجموعات مقارنة مختلفة تمكن الانسان بمرور الزمن من ترتيبها وإعطائها أسماء تقابل أسماء أعدادنا ١، ٢، ٣، ٤، ...



شكل (٢)

حيث تزادد كل مجموعة عن السابقة لها بواحدة فقط وهنا جاء ما يسمى بعدد الرتبة : الأول، الثانى، الثالث،.. ثم جردت تلك الأسماء العددية عن مضمونها المحسوس وأصبحت هى نفسها المجموعة التى نعد بواسطتها.

فعندما نريد أن نوجد عدد مجموعة ما وليكن تلاميذ الفصل فنحن نطلب منهم أن يعدوا : ١، ٢، ٣، ....، ٣٥ وعند التوقف عند العدد ٣٥ نعرف أن عدد التلاميذ هو ٣٥.

وهكذا نجد أن أى عدد طبيعى يتميز نخاصتين: (١) أنه يدل على كم معين وهو ما يسمى بالخاصة الكاردينالية، (٢) أنه يدل على ترتيبه أو موقعه بالنسبة للأعداد الأخرى وهى ما يسمى بالخاصة **الرتبوية** أو الترتيبية. فمثلا العدد «٣» يدل على كم يمثل عدد عناصر المجموعة [* * *] أو أى مجموعة تتناظر معها واحدا بواحد، كما يدل على أنه الثالث حيث يأتى بعد الثانى وقبل الرابع فى مسلسلة الأعداد الطبيعية التى تبدأ من الواحد.

أنظمة العد البدائية

نظام العد عبارة عن: مجموعة من الرموز، واساس للتجميع، واسلوب لتسجيل الأعداد باستخدام هذه الرموز وأساس التجميع

فمثلا فى النظام الحالى الذى نستخدمه فى العد والذى يسمى بالنظام العشرى نجد أن:

مجموعة الرموز: هى المجموعة المكونة من اسماء الأعداد المعروفة

٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩

ومن الواضح أنها عشرة رموز مستقلة وانننا نستخدمها فى تسجيل أى عدد.

أساس التجميع: اساس التجميع هو العشرة.

أسلوب التسجيل: تسجل الأعداد ـ أى تكتب ـ باستخدام فكرة الخانات أو القيمة المكانية فلدينا خانات للآحاد وللعشرات والمئات والآلاف،... وهكذا

وكل عشرة من أية خانة تساوى واحدة من الخانة التى على يسارها، فمثلا كل عشرة من الآحاد تساوى الواحد من العشرات، وكل عشرة من العشرات تساوى واحدا من المئات... وهكذا. ذلك لأن

الاسلام مصر للطباعة

النظام اساسه التجميعى هو العشرة.

ويتضح ذلك من العدد ١٩٨٣ مثلا حيث نجد أن

$$١٩٨٣ = ٣ (١) + ٨ (١٠) + ٩ (١٠)^٢ + ١ (١٠)^٣$$

ونظامنا العشرى هذا وصلنا بعد سلسلة من التطورات ويعرف باسم النظام العربى أو النظام الهندى. والنظرية السائدة أن اصل رموز هذا النظام هندى ونقلها العرب إلى بغداد فى القرن الثامن الميلادى وطوروا طريقة كتابتها واستخدموا الصفر على نطاق واسع بعد أن كان غير شائع استخدامه فى تسجيل الاعداد. وقد اخذ الاوربيون هذه الرموز بصورتها التى كانت مستخدمة فى المغرب العربى ونقصد بذلك الصورة (0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9) عن طريق كتاب الخوارزمى الذى ترجمه الراهب الانجليزى أديلارد وبدأ ترجمته بالعبارة «الخوارزمى يقول...» ثم انتشر هذا النظام فى العالم كله لسهولته فى التسجيل وفى إجراء العمليات الحسابية وبعد أن أصبح الصفر عنصرا أساسيا فى هذا النظام.

وقد نشأت الحاجة إلى نظم للعد عندما بدأ الانسان يشعر بأن مجموعات المقارنة التى يعرفها لا تكفى لحاجته، إذ كان يجد أن هناك أشياء ما زالت ليس لها ما يناظرها فى مجموعات المقارنة تلك، فكان التساؤل «ماذا بعد؟»

ولقد حاول الانسان الاجابة عن هذا التساؤل بعدة طرق:

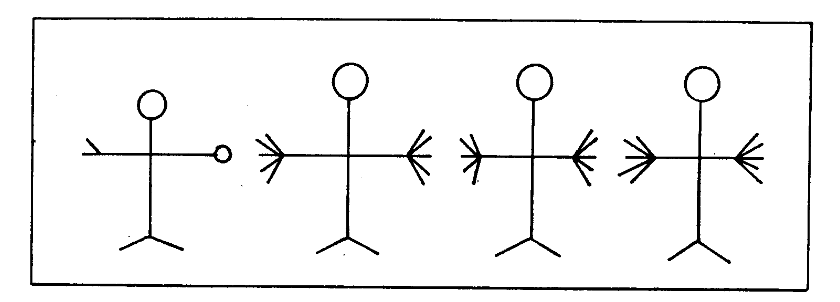
١ ـ التوسع فى مجموعات المقارنة وامتداد تتابع المجموعات تتابعا مرتبا فمثلا:

أصابع يد واحدة ← أصبع اليدين ← رجل كامل ←...

٢ ـ التوسع عن طريق التكرار، فقد وجدت فى بعض الكهوف التى تعود للعصر الحجرى الوسيط صورا تبين فكرة التكرار فى شكل رجل

الاسلام مصر للطباعة

يمكن تسميته برجل العـد، فمثلا العدد ٣٢ كان يظهر كما بـالشكل (٣).



شكل (٣)

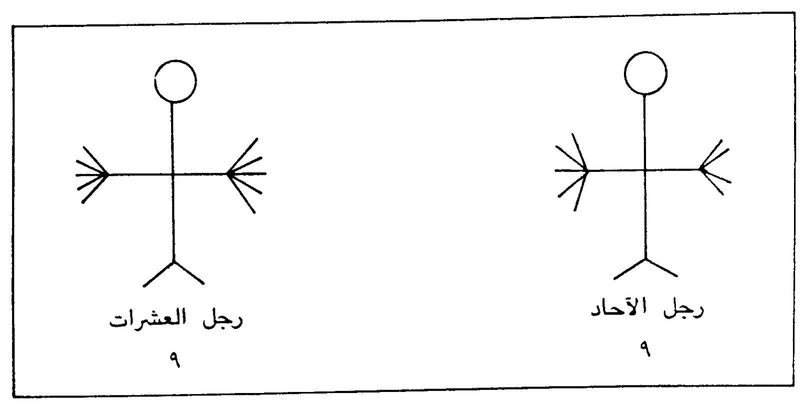
ويسمى هذا النظام نظاما تكراريا جمعيا. وحيث أن الجمع ابدالى وتجميعى فلا يهم ترتيب رجال العد من اليمين إلى اليسـار أو مـن اليسار إلى اليمين إذ أن العدد يدل عليه مجموع الأصـابع التـى بالصورة.

وقد استخدم فى مثل هذا النظام علامات مكررة، كما كان الحـال عند البابليين والمصريين. وقد ابتكرت رموز تمثـل الـواحد والعشرة والمائة مثل:

١، × (عشرة)، ٢ (مائة)، M (الف) الـرومانية.. وذلك لتفـادى كثرة التكرار.

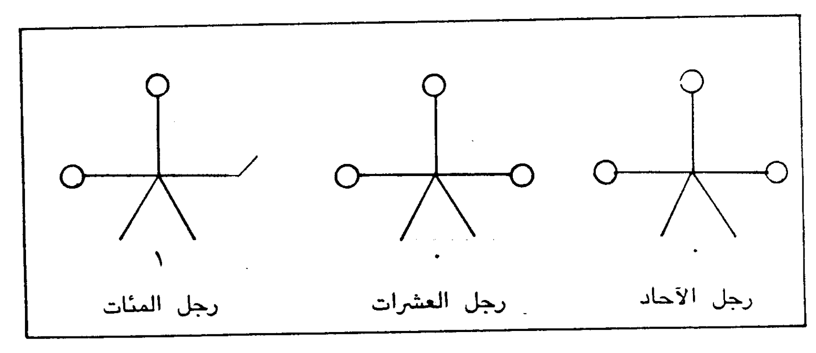
٣ ـ التوسع عن طريق استخدام القيمة المكانية، وذلك باستخدام فكرة الخانات أى أن رمز العدد يمثل قيمتين: القيمة المطلقة والقيمة المكانية بحسب موقعه. وبذلك أمكن كتابة أى عدد مهما كان كبيـرا باستخدام مجموعة صغيرة من الرموز، كما هـو الحـال فى نـظامنا العشرى الحالى.

ومن أمثلة النظم المكانية البدائية ما يتضح فى الأشـكال التـالية حيث يمثل كل رجل قيما مكانية إلى جانب القيم المطلقة :
العدد ٩٩ يظهر كما بالشكل (٤) :



شكل (٤)

والعدد ١٠٠ يظهر كما بالشكل (٥).



شكل (٥)

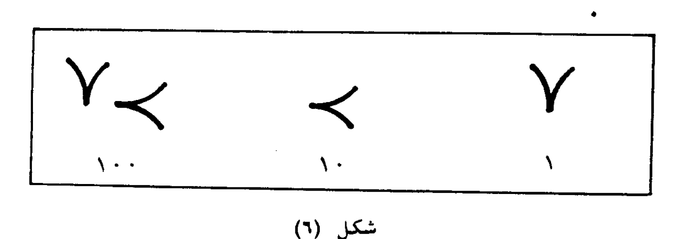
ولا شك أن جوهر الفكرة هو جوهر فكرة المعداد والعداد قـديما وحديثا.

الاسلام مصر للطباعة

نظام العد البابلى:

قبل عام ألفين قبل الميلاد (٢٠٠٠ ق.م) كون البابليون نظاما للعد استخدموا فيه فكرة القيمة المكانية. وقد كان هذا النظام مزيجا من الأساسين العشرى والستينى. فقد كانت الأعداد الأقل من ٦٠ تمثل باستخدام نظام تجميعى عشرى بسيط، والأعداد الأكبر من ٦٠ كان يعبر عنها بالأساس الستينى. وقد كان لنظامهم العدى رموز مسمارية الشكل، كما أنها كانت تأخذ معان مختلفة. وقد استخدم البابليون أيضا فكرة الطرح فى التعبير عن بعض الأعداد وكذلك ظهرت الدائرة ○ فى بعض لوحاتهم الأثرية لتمثل ما نعنيه الآن بالصفر وذلك لتمثيل عدم وجود عدد.

وقد كانت رموزهم الأساسية كما بالشكل (٦).



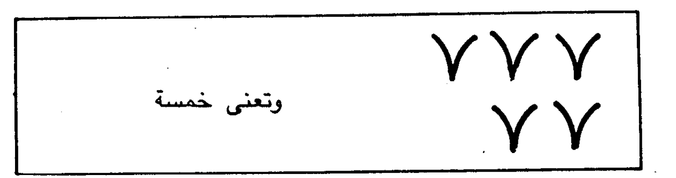
شكل (٦)

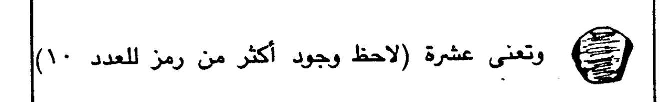
غير أن الرمز V كان يستخدم أيضا ليعنى ٦٠، ٣٦٠٠، ... بصفة عامة (٦٠)^{ن}.

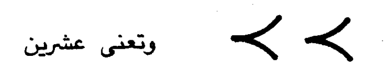
كما كان الرمز < يستخدم ليعنى أعدادا مثل ١٠ × ٦٠، ١٠ × ٣٦٠٠، ... بصفة عامة ١٠ × ٦٠^{ن}.

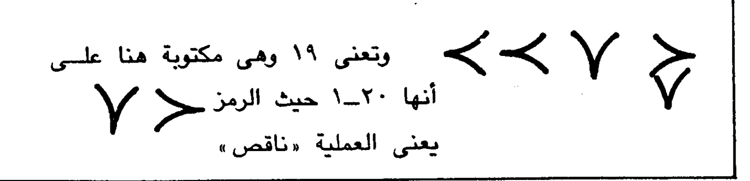
وكثيرا ما وجد فى اللوحات الأثرية أن البابليين كانوا يستخدمون الرمز الأفقى — ليدل على الواحد الصحيح، والرمز + ليدل على العشرة، والرمز ≠ ليدل على العشرين.

وفيما يلى . شكل (٧) أمثلة لبعض الأعداد بالرموز البابلية التـى تعود إلى عام ٢٤٠٠ قبل الميلاد :

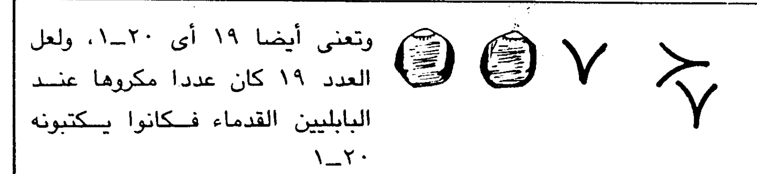


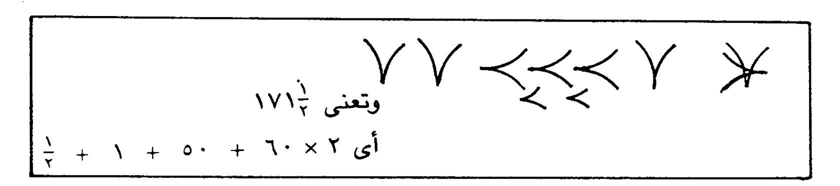






الاسلام مصر للطباعة





شكل (٧)

ولعل ما بقى من الفكر البابلى القديم حتى الآن هو استخدام النظام الستينى فى بعض وحدات القياس حيث أخذ عنهم تقسيم محيط الدائرة إلى ٣٦٠ جزءا. ويعتقد بعض المؤرخين أن هذا النظام فى بابل مرتبط بتقويم السنة القمرية وعدتها ٣٦٠ يوما.

نظام العد المصرى:

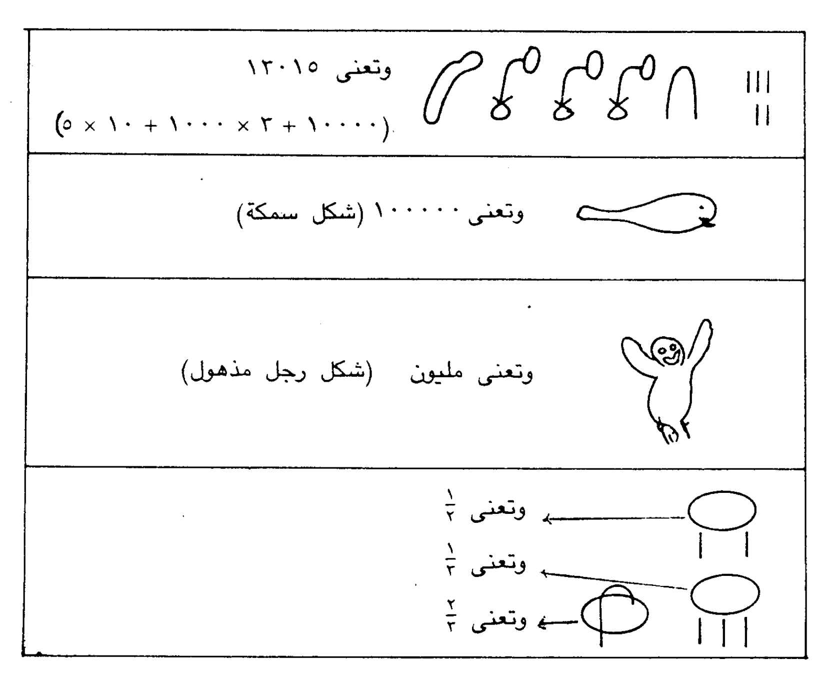
قبل عام ٣٠٠٠ قبل الميلاد كون المصريون نظاما للعد استخدموا فيه الأساس العشرى وهو النظام الذى يبدو طبيعيا إذا وضعنا فى الاعتبار أن عدد أصابع اليدين عشرة، وفى هذا النظام مجموعة من الرموز المستقلة للعشرة والمائة والألف والعشرة آلاف والمائة ألف، غير أنه لم يكن به رمز للصفر ولا للمكان الخالى. كذلك كان نظامهم تكراريا جمعيا فى الأعداد البسيطة كما أنهم استخدموا التكرار الضربى لكتابة الأعداد الكبيرة كما كانت لهم رموز للكسور حيث كانت الكسور المستخدمة عندهم هى الكسور التى بسطها الوحدة. وقد كان

المصريون يسجلون أحداثهم على مواد حجرية أو خشبية أو فخارية وعلى أوراق البردى، وكانوا يكتبون حروفهم ورموزهم بعناية فائقة تتضح من الآثار المصرية القديمة التى نعرفها والتى أدهشت العالم كله قديما وحديثا.

وكانت اللغة المصرية القديمة هى اللغة الهيروغليفية حيث كانت رموز الأعداد الهيروغليفية كما بالشكل (٨):

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

الرمز
وتعنى ١٠ (شكل قوس) وتعنى ٢٠ (لاحظ التكرار)
وتعنى ١٠٠ (شكل محارة أو لولب)
وتعنى ١٠٠٠ (شكل زهرة اللوتس)
وتعنى ١٠٠٠٠ (شكل اصبع)



شكل (٨)

وقد ظهرت أعداد مكتوبة باللغة الهيراطيقية التى تطورت عن اللغة الهيروغليفية (بالاضافة إلى اللغة الديموطيقية) وكانت رموز الأعـداد من ١ إلى ١٠ كما بالشكل (٩):

الاسلام مصر للطباعة

١ ٢ ٣ ٤

٥ ٦ ٧ ٨

٩ ١٠

شكل (٩)

ومن الواضح من دراسة نظام العد عند المصريين القدماء أنه كان نظاما قاصرا لا يساعد على تطور علم الحساب. إذ يكفى أن نعلم أنه للتعبير عن عدد مثل ٨٧٩ فإننا نحتاج إلى أربع وعشرين علامة مختلفة.

أما فى بابل، فحتى مع نظام الخانات لعب افتقاد الصفر عندهم (بل وعند اليونانيين بعدهم) دورا أساسيا فى إعاقة تطور علم الحساب ونظرية الأعداد... وربما ساعدنا هذا على أن نفهم لماذا قال الرياضى الفرنسى لابلاس لنابليون فى أواخر القرن الثامن عشر إنه يعتبر اكتشاف الصفر من أضخم الانتصارات البشرية التى تحققت حتى اليوم.

وأخيرا فمن المهم أن ندرك أن نظام العد نشأ سواء فى مصر أو فى بابل داخل المعابد، وكانت رموز الأعداد بمثابة وحدات اقتصادية وعلمية ودينية فى وقت واحد فقد استحال على كهنة هذه المعابد أن يعتمدوا على ذاكرتهم فى تسجيل كميات المواد الداخلة إلى المعبد أو الخارجة منه ومن هنا نشأت الحاجة إلى التسجيل، ثم ساعدت

الاسلام مصر للطباعة

التجارة فيما بعد على نشأة الحاجة إلى تطوير نظام العد. وإذا كان نظام الحساب قد تطور عند البابليين بأكثر مما تطور فى مصر فإن بعض المؤرخين ينسب هذا إلى أن بابل كانت أكثر اعتمادا على التجارة فى عصور ما قبل التاريخ وظلت كذلك بعدها.

نظام العد الرومانى:

استخدم الرومان نظاما عديا يعتمد على التكرار فكانت رموزه الأساسية كما بالشكل (١٠):

M	C	X	I
١٠٠٠	١٠٠	١٠	١

ثم أضيف إليها الرموز

D	L	V
٥٠٠	٥٠	٥

شكل (١٠)

وقد كان الأساس التجميعى عندهم هو العشرة. كما استخدموا فكرة الطرح فى كتابة بعض الأعداد فمثلا كان الرمز IV يعبر عن العدد ٤ أى ٥ – ١، والرمز CM يعبر عن العدد ٩٠٠ أى ١٠٠٠ – ١٠٠، والرمز IIX يعبر عن ٨، والرمز MCMLXXXIIII يعبر عن العدد ١٩٨٤.

وقد ظل النظام الرومانى سائدا فى أوروبا حتى دخول النظام العربى الخوارزمى فى القرن العاشر الميلادى. وظل النظامان يتنافسان فى أوربا قرابة أربعة قرون إلى أن ساد النظام العربى لسهولته فى تسجيل الأعداد وفى إجراء العمليات الحسابية دون حاجة إلى المعداد الذى كان يستخدم فى ظل النظام الرومانى.

نظام العد العربى القديم:

استخدم العرب قديما نظاما عديا مرتبطا بالحروف الأبجدية العربية كان يسمى «نظام الترقيم على حساب الجمل» ، وهى فكرة كانت مستخدمة فى كثير من ثقافات ذلك الزمان كما فى الحضارة القبطية فى مصر والأغريقية فى اليونان .

وقد كان يوضع لكل حرف أبجدى عدد يدل عليه فكانت الحروف الأبجدية تمثل رموزا عددية فى نفس الوقت وكان حساب الجمل العربى كما بالشكل (١١).

ا	ب	جـ	د	هـ	و	ز	ح	ط
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠
ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ
١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠	٨٠٠	٩٠٠
غ								
١٠٠٠								

شكل (١١)

وعند التعبير عن أعداد أكبر كانت تضم الحروف فى نظام تجميعى ضربى، فمثلا بغ تعنى ٢٠٠٠ (٢ × ١٠٠٠)، يغ تعنى ١٠٠٠٠ (١٠ × ١٠٠٠) بينما كان التجميع العادى يستخدم فى الأعداد الأبسط فمثلا ١٩٨٤ كان يعبر عنها بالرمز د ف ظ غ. ويلاحظ هنا عدم وجود رمز للصفر

وظل حساب الجمل يستخدم فى فترة طويلة وكثيرا ما كان الشعراء يظهرون براعتهم فى صياغة بيت من الشعر يعبر عن تاريخ حدث معين فنجد على سبيل المثال ـ شاعرا يرثى زميله بقصيدة يؤرخ فيها للعام الذى توفى فيه الشاعر حيث يقول فى أحد أبياته:

فقلت لمن أراد الشعر أقصر   فقد أرخت مات الشعر بعده

وإذا ما حسبنا العدد المقابل للجملة «مات الشعر بعده» بحساب الجمل نجده العدد ١١٢٣ وهو العام الهجرى الذى رحل فيه المرثى.

نظام العد الحالى:

ذكرنا سابقا أن نظام العد الحالى والذى يستخدم فى معظم أنحاء العالم يسمى بالنظام العربى الهندى ورموزه العشرة تأخذ الصورتين المعروفتين:

(أ) الصورة الأولى: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ٠ وهى تستخدم فى الشرق العربى. ويعتقد أنها من أصل هندى وقد نقلها العرب من خلال ترجمتهم بناء على أمر الخليفة المنصور لكتاب (السد هانت) وكان أكبر موسوعة هندية فى الفلك والرياضيات (وكان العرب يسمونها السندهند للتسهيل) وقد حملها إلى بغداد عالم فلكى هندى يدعى (كانكاه) وقام بترجمتها إلى العربية يعقوب بن طارق المتوفى عام ٧٩٦م وإبراهيم الغزارى المتوفى فى عام ٧٧٧م.

ويعتقد أن الصورة الحالية للرموز هى تعديل للصورة السنسكريتية الهندية القديمة.

وهناك إدعاءات أخرى ترى أنها جاءت من فارس أو من كابول كما أن البعض ذكر بأنها عربية تماما. وهناك من يرى بأن هذه الرموز وصلت إلى الاسكندرية قبل بغداد فى القرن الخامس الميلادى ولكن بدون الصفر، ولكنها لم تجذب الانتباه. ولا شك فإن قيمة هذه

الاسلام مصر للطباعة

الرموز ليست فى الرموز ذاتها ولكن فى النظام العدى الذى يستخدمها مع الصفر كنظام عشرى متكامل يستخدم مبدأ القيمة المكانية.

(ب) الصورة الأخرى: وهى فى صورتها المعدلة كالآتى:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

وكانت تسمى هذه الرموز بالرموز الغبارية نظرا لأنها كانت تـكتب على سطح من الغبار أو الرمال. وهذه الرموز هى التى تستخدم حاليا فى المغرب العربى. وقد حاول أحد الشعراء أن يمثل رموزها التسعة الأولى فى الأبيات التالية:

ألف وحاء ثم حـج بعـده	**عين وبعد العين عو تـرسم**
هاء وبعد الهاء شكل ظاهر	**يبدو كمخطاف إذ هو يرقم**
صفران ثامنها وقد ضما معا	**والواو تاسعها بذلك تختـم**

حيث ١ تشبه الحرف ا، 2 تشبه الحرف ح، 3 تشبه الحرف كلمة حج، 4 تشبه حرف ع ، 5 تشبه كلمة عو، 6 تشبه حـرف الهـاء (هـ)، 7 تشبه المخطاف، 8 تشبه صفرين فوق بعضهما ، 9 تشـبه حرف الوار (و)..

وكما ذكرنا سابقا فقد نقلت هذه الرموز إلى أوروبا عـن طـريق كتاب للخوارزمى وقد ترجم كتاب الخوارزمى إلى اللاتينية بـواسطة أديلارد فى عام ١١٢٠م. ولكن هذه الرموز كانت قد وصلت قبـل ذلك بواسطة المسافرين والتجار العرب إلى الأندلس والتى كان العرب قد فتحوها عام ٧١١ ميلادية. وقد وجدت وثائق فى أسبانيا تعـود إلـى القرن العاشر تتضمن هذه الرموز ولكنها انتشرت بدرجة كبيرة بعـد ترجمتها إلى اللاتينية فى القرن الثانى عشر تلتها تـرجمات كثيـرة. وكان لسهولة العمل الحسابى بالنظام العربى والـذى أطلـق عليـه الغربيون كلمة ألجوريزم Algorism تكريما للخوارزمى فضل بقاء هذا النظام وإنهاء النظام الرومانى السابق والذى كان يحتاج إلى الآلـة

الحسابية (المعداد) وإلى حسابين يحترفون العمل الحسابى ويتقنون العمل على المعداد.

وبطبيعة الحال كانت هناك أشكال متعددة لتلك الرموز ولم تستقر شكلها النهائى بالصورة الحالية إلا بعد ظهور الطباعة، مما أدى إلى تقنين شكل تلك الرموز بالصورة التى نراها بها حاليا، فى معظم أنحاء العالم. والذى نود تأكيده هنا أن رموز الأعداد التى نـراها الآن فى الكتب الأجنبية هى رموز عربية وما زالت تكتب مـن اليميـن إلـى اليسار (آحاد فعشرات فمئات...) أيا كانت اللغة التى تستخدمها.

وقد ذكر أبو الريحان البيرونى (من مشاهير الرياضيين العرب فى القرن الحادى عشر الميلادى) أن صور الحروف وأرقـام الحسـاب تختلف ـ فى الهند ـ باختلاف المحلات وأن العرب أخذوا أحسـن ما عندهم فهذبوا بعضها وكونوا من ذلك سلسلتين عـرف إحـداها (الصورة أ) بالأرقام الهندية وهى التى تستعملها بلادنا وأكثر الأقطار الاسلامية والعربية. وعرفت الثانية (الصورة ب) باسم الأرقام الغبارية وقد انتشر استعمالها فى بلاد المغرب والأندلس وعن طريقها دخلـت إلى أوروبا باسم الأرقام العربية.

إن من المهم أن نتذكر أن اهتمام العرب بعلم الحساب وتـطوير نظام العد كان قد سبقه تطور احتياجات الحضارة العربية الاسلامية فى العصر العباسى فى المعاملات التجارية وفى مسح الأراضى... إلـخ، وقبل ذلك كان من مستلزمات علم الفرائض لتحديد أنصبة المواريث والخراج ومواقيت الصلاة. فالشريعة إذن كانت تقضى بالاهتمام بـه وتعلمه. والحسابات المعقدة التى يفترضها هذا الفرع مـن فـروع التشريع تجعل الحساب علما مساعدا للجزاء فى هذه القضايا. ولـذا كان من المعتاد أن يوصف الشخص المشتغل بعلم الحساب بفـلان « الفرضى الحاسب ».

خصائص الأعداد:

كانت الأعداد الطبيعية ١، ٢، ٣، ٤،.... محل تفكير واهتمام الكثيرين من الفلاسفة والرياضيين على مر العصور فقد كون فيثاغورس (٥٧٠ ق.م.) مثلا مدرسة فلسفية لدراسة الهندسة والحساب والموسيقى والفلك وكانت تلك المدرسة فى مدينة كريتون التى تقع فى جنوب إيطاليا وقد هرب إليها من جزيرة ساندس بعد غزو الفرس لأيونيا حوالى ٥٣٠ ق.م. وكريتون هى مدينة قريبة من ساندس وكانت ذات مركز تجارى هام. وكان العنصر الأساسى فى كل تلك الدراسات هو العدد الذى اعتبروه أنه أصل كل الأشياء ومفتاح فهم الكون. فقد افترضوا أن عناصر العدد هى عناصر كل الأشياء وأن السماء ليست إلا سلما موسيقيا وعددا، وأن الحياة أيضا عدد ونغم. ولم تكن هذه العقيدة شبه الدينية وشبه الرياضية قاصرة على الفيثاغورثيين بل وجدت فى عهود سابقة لهم فى الحضارات القديمة وامتدت إلى ما بعدهم حتى عهد جاليليو فى القرن السادس عشر الميلادى، وقد اشتغل بعض العرب فى العصور الوسطى بخواص العدد ومن أشهر من فعل ذلك الجماعة الفلسفية المعروفة باسم «إخوان الصفا» التى كان لها معتقدات غريبة فى الأعداد.

ومن أمثلة المعتقدات الخرافية الطريفة عن الأعداد ما يلى:

- أن الأعداد الأربعة الأولى (١، ٢، ٣، ٤) تمثل العناصر التى كانوا يعتبرونها العناصر الأساسية فى تكوين الطبيعة وهى النار والماء والهواء والتراب.

ولقد ربط الفيثاغوريون الأعداد بالهندسة. فللنقطة عندهم كيان، والخط المستقيم يتحدد بنقطتين، كما يتحدد المستوى بثلاث نقط، ويتحدد الفراغ بأربع نقط. ومن هنا اتجه فيثاغورس إلى اعتبار الكون كامنا فى هذه الأعداد الأربعة.

وكان الفيثاغوريون يرتلون لهذا الرباعى المقدس بقولهم «باركنا أيها العدد السماوى الذى خلق الآلهة والناس. أيها الرباعى المقدس الذى يشمل أصل هذ الخلق المتدفق إلى الأبد».

وكان الفيثاغوريون يتمادون فى عملية المناظرة بين الأعداد والأشياء فى هذا العالم . فالأعداد الفردية مذكرة والأعداد الزوجية مؤنثة . والعدد واحد ليس عددا فى ذاته بل هو مصدر كل الأعداد لذا اتخذو الواحد رمزا للتعقل ، والعدد اثنين رمزا للرأى ، والعدد ثلاثة رمزا للقدرة الجنسية ، والعدد أربعة رمزا للعدل ، والعدد خمسة رمزا للزواج لأنه يتكون من أول عدد مذكر (٣) وأول عدد مؤنث (٢) .

وكان الفيثاغوريون يعتقدون أن أسرار الألوان تعرف من صفات العدد خمسة والبرودة من صفات العدد ستة، وسر الصحة فى العدد سبعة، وسر الحب فى العدد ثمانية (وهو حاصل جمع العدد ثلاثة الذى يرمز للقوة الجنسية والعدد خمسة الذى يرمز للزواج).

وعندهم أن من الأعداد البهى الكريم والكئيب المضجر. فالأعداد التامة بهية وكريمة لأنها نادرة الوجود أماالأعداد القبيحة الرديئة فكثيرة جدا.

ويعرف العدد التام بأنه الذى يقبل القسمة على أعداد صحيحة يكون مجموعها مساويا للعدد التام.

والأعداد عند الفيثاغوريين هى أخلاق أيضا. سئل فيثاغورس يوما عن تعريفه للصديق فقال «صديقك من كان صورة منك مثل العددين ٢٢٠، ٢٨٤» وتفسير ذلك أن الأعداد الصحيحة التى يقبل العدد ٢٨٤ القسمة عليها (وهى ١، ٢، ٤، ٧١، ١٤٢) مجموعها ٢٢٠ والعكس صحيح فالأعداد الصحيحة التى يقبل العدد ٢٢٠ القسمة عليها (١، ٢، ٤، ٥، ١٠، ١١، ٢٠، ٢٢، ٤٤، ٥٥، ١١٠) مجموعها ٢٨٤ . وهذا ما سوف نوضحه فى فصل تال .

وكان بعض العرب يرون أيضا فى علم الأعداد نوعا من القداسة ولكن هذه القداسة ـ كما يقول الأستاذ قدرى حافظ طوقان ـ لم تمنعهم من تطبيق الأعداد والرياضات فى شئون الحياة العملية. وكانوا يقدمون علم الحساب على سائر العلوم الرياضية !! لأن هذا العلم مركوز فى كل نفس بالقوة..

وكما قدمنا فالاشتغال بعلم الحساب كان من مستلزمات علم الفرائض،، والشريعة الاسلامية كانت إذن تقضى بتعلمه، وذلك على عكس علم الهندسة الذى كان المتشددون من بعض رجال الدين يتوجسون منه ويربطون بينه وبين الفلسفة.

وبصفة عامة فإن مثل هذه الدراسات الطريفة عن الأعداد كانت ذات فائدة كبيرة فى تطوير نظرية الأعداد فيما بعد.

تصنيفات الأعداد

كان الاغريق يفرقون بين (ا) الدراسة المجردة للأعداد وهى ما تختص بخواص الأعداد والعلاقات بينها وأطلقوا على ذلك اسم «الأرثيماطيقا» (Arithmetic) وهو أقرب إلى ما يسمى عند الرياضيين الحاليين بنظريةالأعداد، و(ب) الدراسة المتعلقة بالاستخدام العملى للأعداد والتى تتضمن إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة وأطلقوا على ذلك اسم الحساب السوقى (Logistic) وهو أقرب إلى ما يدرس حاليا فى مدارسنا الابتدائية تحت عنوان الحساب.

وفيما يلى بعض تصنيفات الأعداد:

الأعداد الفردية والأعداد الزوجية

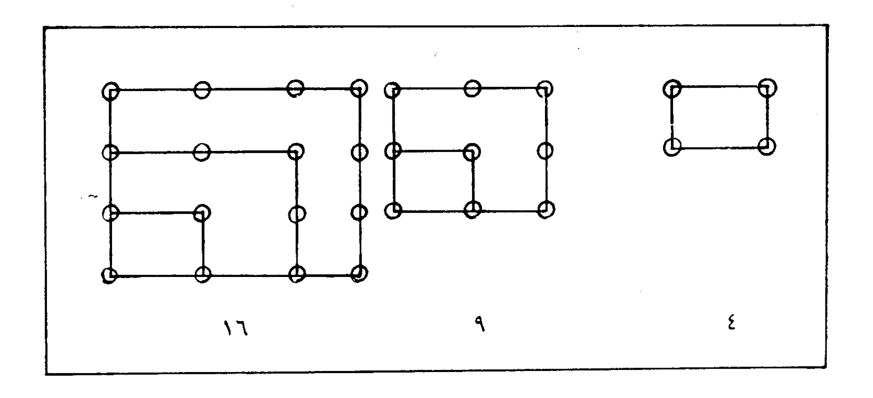
التمييز بين الأعداد الفردية والزوجية هو أحد المظاهر القديمة فى

الاسلام مصر للطباعة

علم الأريثما طبقا. وقد عـرف الفيثـاغوريون ذلك وربمـا يـكون فيـثاغورس نفسه قد تعلمه فى مصر أو بابل. ومـن بيـن الألعـاب الشهيرة فى عصر أفلاطون (٤٣٠ ــ ٣٤٩ ق.م) أن يخفى شـخص فى إحدى يديه بعض قطع النقود ويسأل عما إذا كان ما فى يده عـددا زوجيا أو فرديا من العملات.

والأعداد الفردية تعطى مربعات عند جمعها بالتتابع فمثلا:

١ + ٣ = ٤، ١ + ٣ + ٥ = ٩، ١ + ٣ + ٥ + ٧ = ١٦



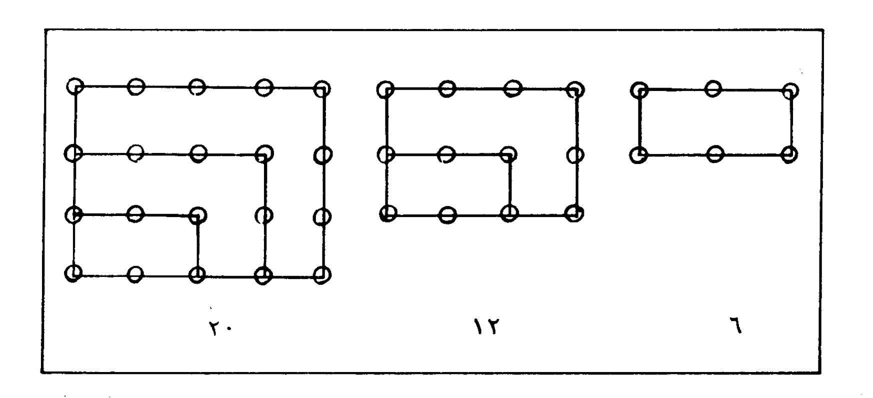
شكل (١٢)

ولكن الأعـداد الزوجية تعطى مستطيلات عند جمعهـا بـالتتابع فمثلا:

٢ + ٤ = ٦ = ٢ × ٣

٢ + ٤ + ٦ = ١٢ = ٣ × ٤

٢ + ٤ + ٦ + ٨ = ٢٠ = ٤ × ٥



شكل (١٣)

الأعداد هندسية الشكل

كان امرا طبيعيا أن يمثل الفثياغوريون الأعداد بنقاط (أو حبـات حصى) تأخذ أشكالا هندسية منتظمة بحسب العدد نفسه ثم دراسـة خواص هـذه الأعداد. ومن أشهر هذه الأعـداد ما سمى بـالأعداد المضلعه وهى التى تمثل بمضلع مغلق ومن أمثلتها:

الأعداد المثلثة:

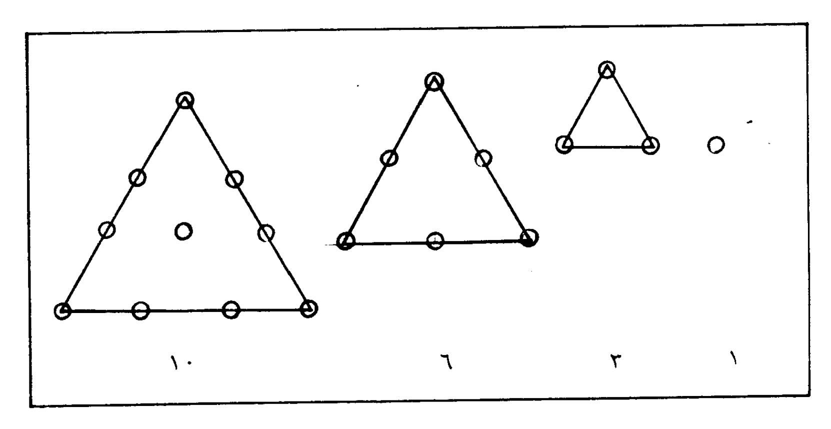
وهى التى يمكن تمثيلها بمثلث متساوى الأضلاع

مثل: (١، ٣، ٦، ١٠، ٠٠٠).

ومَن الملاحظ أن كلا من هذه الأعداد يساوى مجموعة جزئية من المتتابعة ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ...، فمثلا:

الاسلام مصر للطباعة

١ = ١ عدد مثلثى
١ + ٢ = ٣ عدد مثلثى
١ + ٢ + ٣ = ٦ عدد مثلثى
١ + ٢ + ٣ + ٤ = ١٠ عدد مثلثى
١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ = ١٥ عدد مثلثى... وهكذا

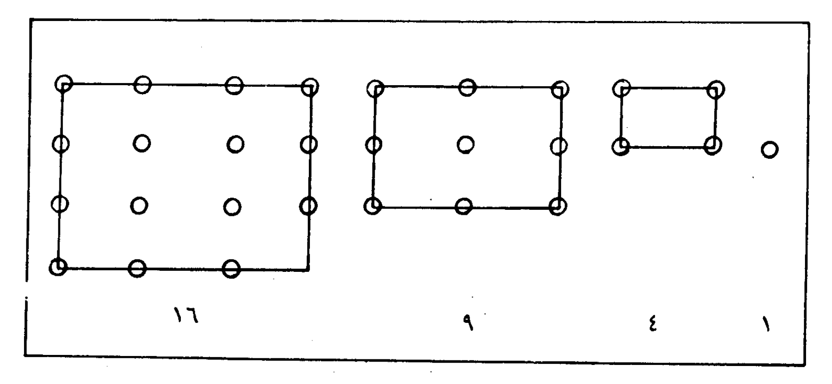


شكل (١٤)

الأعداد المربعة:

وهى الأعداد التى يمكن تمثيلها بمربع حيث يوجد عدد يضرب فى نفسه فتحصل على العـدد المـربع مثـل: ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ... ويلاحظ أن العدد المربع يساوى مجموع متتابعة من الأعداد الفردية ابتداء من العدد ١ فمثلا:

١ = ١
١ + ٣ = ٤ = $(٢)^٢$
١ + ٣ + ٥ = ٩ = $(٣)^٢$
١ + ٣ + ٥ + ٧ = ١٦ = $(٤)^٢$
١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩ = ٢٥ = $(٥)^٢$ ... وهكذا.



شكل (١٥)

وسوف نلاحظ أن أى مربع يســاوى مجمــوع عــددين مثلثيــن متتابعين فمثلا :

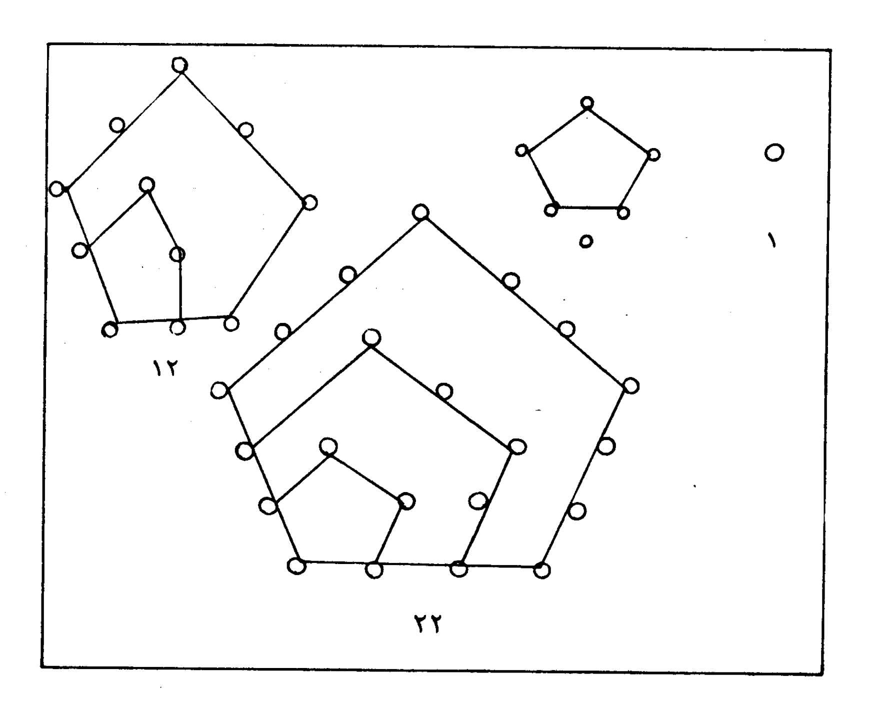
٤ = ١ + ٣

٩ = ٣ + ٦

١٦ = ٦ + ١٠ ، وهكذا...

الأعداد المخمسة :

وهى التى يمكن تمثيلها بخماسى منتظم ومن أمثلتها : ١، ٥، ١٢، ٢٢، ...



شكل (١٦)

ويلاحظ أن العدد المخمس يساوى مجموع عددين أحدهما مثلث والآخر مربع فمثلا:

٥ = ١ + ٤	حيث ١ عدد مثلث، ٤ عدد مربع
١٢ = ٣ + ٩	حيث ٣ عدد مثلث، ٩ عدد مربع
٢٢ = ٦ + ١٦	حيث ٦ عدد مثلث، ١٦ عدد مربع
٣٥ = ١٠ + ٢٥	حيث ١٠ عدد مثلث، ٢٥ عدد مربع... وهكذا

وقد وضع نيكوماخوس (١٠٠م) جدولا يبين الأعداد المضلعة نبرز جانبا منه فيما يلى:

أعداد مثلثة	١	٣	٦	١٠	١٥	٢١
أعداد مربعة	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦
أعداد مخمسة	١	٥	١٢	٢٢	٣٥	٥١
أعداد مسدسة	١	٦	١٥	٢٨	٤٥	٦٦
أعداد مسبعة	١	٧	١٨	٣٤	٥٥	٨١
أعداد مثمنة	١	٨	٢١	٤٠	٦٥	٩٦

لاحظ أن :

العدد المثمن ٨ = العدد المسبع ٧ + العدد المثلث ١

والعدد المثمن ٢١ = العدد المسبع ١٨ + العدد المثلث ٣

الأعداد الأولية

عرف أرسطو (٢٨٤ – ٣٢٢ ق.م) وإقليدس (حوالى ٣٠٠ ق.م العدد الأولى بأنه العدد الذى «لا يقاس بأى عدد آخر، ولم يكن الاغريق يعترفون بالواحد الصحيح على أنه عدد ومن ثم فإن تعريفهم يقترب من التعريف السائد حاليا وهو أنه عدد صحيح أكبر من الواحد ولا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى الواحد الصحيح ومن أمثلة الأعداد الأولية ٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٧، ١٩، ...

ويكون العدد الصحيح غير أولى إذا أمكن تحليله إلى عاملين غير الواحد الصحيح والعدد نفسه. ومن أمثلة الأعداد غير الأولية :
٤، ٦، ٩، ١٢١، ...

وقد وضع أراتوثينيس Eratosthenes (حوالى ٢٠٠ ق.م) جدولا سمى بغربال أراتوثينيس يبين فيه الأعداد الأولية ويبدو جانب منه كما فى الشكل التالى

~~١٠~~	~~٩~~	~~٨~~	**٧**	~~٦~~	**٥**	~~٤~~	**٣**	**٢**	١
~~٢٠~~	**١٩**	~~١٨~~	**١٧**	~~١٦~~	~~١٥~~	~~١٤~~	**١٣**	~~١٢~~	**١١**
~~٣٠~~	**٢٩**	~~٢٨~~	٢٧	~~٢٦~~	~~٢٥~~	~~٢٤~~	**٢٣**	~~٢٢~~	~~٢١~~
~~٤٠~~	~~٣٩~~	~~٣٨~~	**٣٧**	~~٣٦~~	~~٣٥~~	~~٣٤~~	٣٣	~~٣٢~~	**٣١**
~~٥٠~~	~~٤٩~~	~~٤٨~~	**٤٧**	~~٤٦~~	~~٤٥~~	~~٤٤~~	**٤٣**	~~٤٢~~	**٤١**

ويمكن الحصول على الأعداد الأولية بأن نبدأ بأول عدد أولى وهو العدد ٢ ثم نحذف كل ثانى عدد (٤، ٦، ٨، ١٠، ...) ثم نأتى إلى العدد الأولى التالى وهو العدد ٣ ثم نحذف كل عدد ثالث (٦، ٩، ١٢، ...).
ثم العدد الأول التالى وهو العدد ٥ ثم نحذف كل عدد خامس... وهكذا وهى عملية لا تنتهى وذلك لأن «عدد الأعداد الأولية لا نهائى».

وقد أثبت أقليدس لانهائية عدد الأعداد الأولية وذلك بأن اقترض أن آخر عدد أولى هو ن ثم أثبت أنه يوجد عدد أولى أكبر من ن.

وقد حاول الكثيرون من الرياضيين وضع قاعدة للعدد الأولى. وعلى سبيل المثال اعتقد فرمات (٦٣٨م.) أن كل عدد بالصورة ($٢^{٢^{ن}}$ + ١) حيث ن عدد صحيح يكون عددا أوليا. فمثلا العدد ($٢^{٢^{٣}}$ + ١) = $٢^{٨}$ + ١ = ٢٥٧ عددا أوليا. ولكن وجد أن قاعدة فرمات صحيحة فقط فى حالة ن = صفر ، ١، ٢، ٣، ٣، ٤.

ووضع أويلر عام ١٧٧٢م القاعدة $ن^{٢}$ − ن + ٤١ ولكنها تعطى أعدادا أولية إلى ن = ٤٠ فقط. وقد أنفق أحد الرياضيين واسمه كوليك (١٧٧٣ − ١٨٦٣م). عشرين سنة من عمره فى عمل جداول للأعداد الأولية.

الأعداد التامة

قبل أن نعرف العدد التام سوف نعرف مصطلحا جـديدا اسـمه «القاسم التام» القاسم التام لعدد صحيح هو عامل من عوامل العدد بشرط ألا يكون العامل هو العدد نفسه. فمثلا:

القواسم التامة للعدد ٨ هى ١، ٢، ٤
القواسم التامة للعدد ٦ هى ١، ٢، ٣
القواسم التامة للعدد ١٢ هى ١، ٢، ٣، ٤، ٦

ويعرف **العدد التام** على أنه العدد الذى يساوى مجموع قواسمه التامة فمثلا:

العدد ٦ عدد تام لأن ٦ = ١ + ٢ + ٣
العدد ٢٨ عدد تام لأن القواسم التامة للعدد ٢٨ هـى ١، ٢، ٤، ٧، ١٤، أى ٢٨ = ١ + ٢ + ٤ + ٧ + ١٤

وقد وضع أقليدس النظرية التالية للحصول على أعداد تامة:

احسب المجاميع الجزئية للمتسلسلة
١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... وهكذا.

إذا كان أحد المجاميع عددا أوليا فاضرب هذا المجموع فى الحد الأخير للمتسلسلة تحصل على عدد تام. فمثلا:

١ + ٢ = ٣ وهو عدد أولى
الحد الأخير فى المتسلسلة ١ + ٢ هو العدد ٣ × ٢ = ٦ وهـو عدد تام.

كذلك
١ + ٢ + ٤ = ٧ وهو عدد أولى
الحد الأخير هو ٤
٧ × ٤ = ٢٨ وهو عدد تام

وطبقا لهذه القاعدة فإننا نحصل على الأربعة أعداد **الأولى**:
٦، ٢٨، ٤٩٦، ٨١٢٨ وهى **أعداد** تامه.

والأمر ليس بالبساطة فى اتباع هذه القاعدة إذ أن العـدد التـام الخامس هو ٣٣٥٥٠٣٣٦.

وفى عام ١٩٦١ تم الوصول إلى العدد التام رقم ٢٠ وهـو عـدد مكون من ٢٦٦٣ رقما.

وعدد الأعداد التامة المعروفة حتى عام ١٩٦٩ هو ٢٣ عددا تاما فقط أكبرها مكون من ٦٧٥١ رقما وهو $٢^{١١٢١٢}(٢^{١١٢١٣} - ١)$
وهو $٢^{٢١٢\ ١١} \times (٢^{٢١٢١١} - ١)$

الأعداد الناقصة:

العدد الناقص هو الذى يكون مجموع قواسمه التامه أقـل منـه.
فمثلا:

الأعداد ٨، ٩، ٢٧، أعداد ناقصة لأن:

١ + ٢ + ٤ < ٨
١ + ٣ < ٩
١ + ٣ + ٩ < ٢٧

الأعداد الزائدة:

العدد الزائد هو الذى يكون مجموع قواسمه التامه أكبـر منـه.
فمثلا:

الأعداد ١٢، ١٨، ٢٠، ٢٤، ٣٠، ٣٦ زائدة لأن:

١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٦ > ١٢
١ + ٢ + ٣ + ٦ + ٩ > ١٨
وأول عدد زائد فردى هو ٩٤٥

الأعداد المتحابة:

يقال أن عددين متحابان إذا كان مجموع القـواسم التـامة لأى منهما يساوى الآخر.

فمثلا: العددان ٢٢٠، ٢٨٤ متحابان

لأن: قواسم ٢٢٠ التامة هى:

١، ٢، ٤، ٥، ١٠، ١١، ٢٠، ٢٢، ٤٤، ٥٥، ١١٠.

مجموع قواسم ٢٢٠ = ١ + ٢ + ٤ + ٥ + ١٠ + ١١ + ٢٠ + ٢٢ + ٤٤ + ٥٥ + ١١٠ = ٢٨٤

ومجموع قواسم ٢٨٤ = ١ + ٢ + ٤ + ٧١ + ١٤٢ = ٢٢٠

وكان الشخص يبحث عن صديق له بحيث يكون حســاب الجمــل لاسميهما عددين متحابين.

وقد توصل أويلر (عام ١٧٤٧م) إلى ٦٠ زوجـا مـن الأعـداد المتحابة، وتوصل نيكولاى بجانينى وهو فى سن السادسة عشرة إلــى أن العددين ١١٨٤، ١٢١٠ عددان متحابان وكان ذلك عام ١٨٦٦م

ومن أزواج الأعداد المتحابة المعروفة:

(٢٦٢٠، ٢٩٢٤)، (٥٠٢٠، ٥٥٦٤)، (٦٢٣٢، ٦٣٦٨).

ويروى عن ثابت بن قرة وهو من مشاهير الـرياضيين العـرب فى القرن التاسع الميلادى ومن أبرز المتـرجمين لـكتاب (الأصــول) لاقليدس، أنه وجد قاعدة لايجاد الأعداد المتحابة كما يلى:

لتكن

ا = ٣ × $٢^{ن}$ − ١،

ب = ٣ × $٢^{ن-١}$ − ١،

حـ = ٩ × $٢^{٢ن-١}$ − ١

حيث ن عدد صحيح

فإذا كانت ا، ب، حـ أعدادا أوليه

فإن العددين ق، ك يكونان متحابين حيث

ق = $٢^{ن}$ × ا × ب

، ك = $٢^{ن}$ × حـ

وبوضع ن = ٢ نجد أن

ا = ٣ × $٢^{٢}$ − ١ = ١١

ب = ٣ × $٢^{٢-١}$ − ١ = ٥

جـ = ٩ × $٢^{٤-١}$ − ١ = ٧١

إذن

ق = $٢^{٢}$ × ١١ × ٥ = ٢٢٠

، ك = $٢^{٢}$ × ٧١ = ٢٨٤

وهما عددان متحابان.

الاسلام مصر للطباعة

الفصل الثانى

العمليات الحسابية ومزيد من الأعداد

الاسلام مصر للطباعة

أولا : العمليات الحسابية بالأعداد الصحيحة

انبثق العمل الحسابى عن الحاجات الأساسية لحياة البشر مثـل حساب ممتلكاتهم ومبادلاتهم التجارية وتبـادل السـلع والحـاجيات وتقسيم الأراضى والحسابات الفلكية المرتبطة بالمواسم الزراعية. ففى مصر القديمة ـ مثلا ـ حيث كان فيضان النيل أمرا بـالغ الأهميـة احتاج المصريون إلى تحديد موعد بداية غمر الأرض بالمياه وربـط ذلك بحركات النجوم فى السماء.

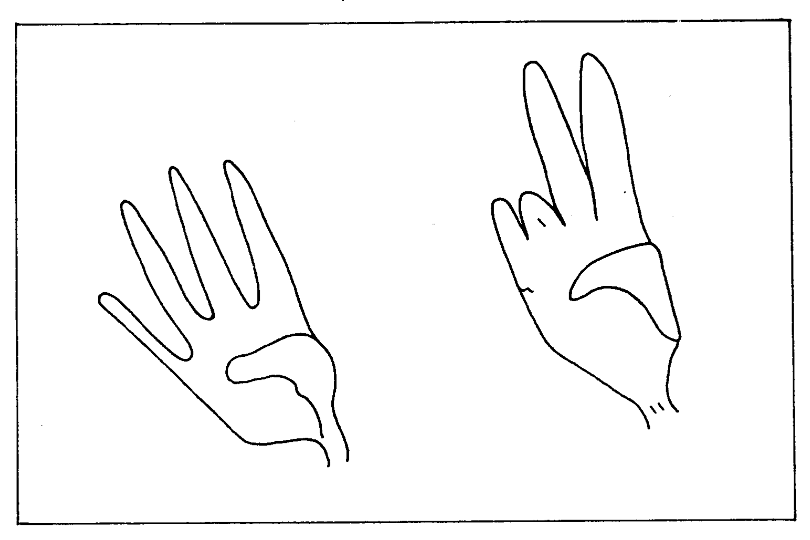
وقد استخدم المعداد فى أوروبا وغيرها بأشكاله المختلفـة حتـى قرابة القرن السابع عشر لاجراء العمليات الحسابية كما اسـتخدمت أصابع اليدين فى أوضاع مختلفة للتعبير عن الأعداد وعـن إجـراء بعض العمليات الحسابية وظل استخدامها إلى عصور قريبة فى أماكن متفرقة حيث وجد أنها تستخدم بواسطة بعض الفـلاحين الـروس والفرنسيين حتى أوائل القرن العشرين.

١٥٣٤ ـ ١٨٦ = ١٣٤٨

١٣٤٨		١٥٣٤
١		١
٣		٥
٤		٣
٨		٤

شكل (١٧)

وصورة المعداد فى الشكل السابق توضح العملية الحسابية :
١٥٣٤ - ١٨٦ = ١٣٤٨ (شكل ١٧)



شكل (١٨) : ٧ × ٩ = ٦٣

والصورة السابقة تمثل عملية ضرب ٧ × ٩ باستخدام الأصابع حيث تحسب كالآتى :

٧ - ٥ = ٢ نرفع اصبعين ونبقى ثلاثة أصابع مطوية

٩ - ٥ = ٤ نرفع أربعة أصابع ونبقى اصبعا واحدا مطويا.

مجموع الأصابع المرفوعة = ٢ + ٤ وتضرب فى ١٠ يكون الناتج ٦٠

حاصل ضرب الأصابع المطوية = ٣ × ١ وتعطى ٣

ويكون الناتج ٣ + ٦٠ = ٦٣ هو حاصل الضرب المطلوب.

ونعرض فيما يلى بعض الطرق التاريخية التى استخدمت لاجراء العمليات الحسابية :

الاسلام مصر للطباعة

عملية الجمع :

مثال (١) : (بالطريقة الرومانية القديمة) :

لجمع العددين ٧٧٧ + ٢١٦ كانت تجــرى بــالرموز الــرومانية كالآتى :

DCC<XXVII	٧٧٧
CCXVI	٢١٦
DCCCC<XXXVVIII	٩٩٣

ويمكن كتابة النتيجة بالصورة المختصرة CMXCIII حيــث CM تعنى ٩٠٠ (١٠٠٠ – ١٠٠)، XC تعنى ٩٠ (١٠٠ – ١٠)

مثال (٢) : (طريقة هندية)

خاطب الرياضى الهندى باسكارا (١١٥٠م) الصــغيرة ليــلاڤاتى قائلا : عزيزتى ليلا، اظهرى مهارتك فى الجمع بأن تجدى لى مجموع، ٢، ٥، ٣٢، ١٩٣، ١٨، ١٠، ١٠٠

وقد وجد فيما بعد أن طريقة الجمع كانت كما يلى :

مجموع الآحاد هو ٢، ٥، ٢، ٣، ٨، ٠، ٠ = ٢٠
مجموع العشرات هو ٣، ٩، ١، ١، ٠ = ١٤
مجموع المئات هو ١، ٠، ١ = ٢
مجموع المجاميع = ٣٦٠

ويبدو أن الهنود كانوا يضــعون المجموع أسفل الأعداد ويبدأون بجمع الآحاد ثم العشرات ثم المئات... وهكذا. كما هو الحال عندنا.

وقد ظهرت بعض الأمثلة كانوا يجمعون فيها مــن اليســار إلــى اليمين ثم يقومون بتعديل المجاميع كلما احتاج الأمر إلى ذلك كما فى

المثال التالى :

٦٥٣٩
٣٢٨٦
٩٨٢٥ (٨ و ٢ مشطوبان)
٨ ٢

أى أن ٦٥٣٩ + ٣٢٨٦ = ٩٨٢٥

مثال (٣) : (طريقة عربية)

كان العرب يكتبون المجموع ـ فى معظم الأحيان ـ أعلا الأعداد المجموعة كما كانوا يستخدمون مجموع الأرقام لتحقيق صحة الناتج. وقد تأثر الأوربيون بهذه الطريقة والمثال التالى يوضح هذه الـطريقة لجمع العددين ٥٦٨٧ + ٢٣٤٣

المجموع	٨٠٣٠	٢
	٥٦٨٧	٨
	٢٣٤٣	٣

والعمود الأخير يوضح طريقة التحقيق بجمع أرقام كل عدد

بالنسبة للعدد ٥٦٨٧ يكون ٧ + ٨ + ٦ + ٥ = ٢٦، ٦ + ٢ = ٨

بالنسبة للعدد ٢٣٤٣ يكون ٣ + ٤ + ٣ + ٢ = ١٢، ٢ + ١ = ٣

٨ + ٣ = ١١، ١ + ١ = ٢

وبجمع أرقام المجموع وهو ٨٠٣٠ نجد أن

٠ + ٣ + ٠ + ٨ = ١١، ١ + ١ = ٢

وهو ما يتفق مع مجموع أرقام العددين

(لاحظ أن هذه القاعدة ليست صحيحة دائما)

مثال (٤) : (طريقة أخرى) :

استخدمت طرق أخرى مثل الطريقة التى كان يكتب فيها مجمــوع كل عمود منفصلا ثم تجمع المجاميع. كما كانت الأعداد الأكبر تكتب من أعــلا، وكذلك كانت توضع نقط لبيان عملية الحمل مــن خــانة لأخرى. والمثال التالى يبين جمع كل عمود على حده :

٨٣٧٩
٩٦٨
٣٤
٢١
١٦
١٢
٨
٩٣٨١

عملية الطرح :

مثال (١) : (طريقة الطرح من عشرة والتكملة) :

تعتمد هذه الطريقة على المبدأ التالى :

أ – ب = أ + (١٠ – ب) – ١٠

فمثلا : عند طرح ١٢ – ٧ نقول

١٠ – ٧ = ٣، ٢ + ٣ [illegible] فيكون

١٢ – ٧ [illegible]

ولاجراء العملية ٤٢٢ [illegible] ٢٨٧ نسير كالآتى :

الاسلام مصر للطباعة

٤٢٢
٢٨٧
١٣٥

وتفسيرها :

(١) ٢ – ٧ لا يصح، نستلف ١ من خانة العشرات (ويساوى عشرة
١٠ – ٧ = ٣، ٣ + ٢ = ٥ توضع فى الناتج.

(٢) الخانة الثانية ٣ تصبح ٢ لأننا استلفنا منها ١
١ – ٨ لا يصح، نستلف ١ من خانة المئات (ويساوى ١٠)
١٠ – ٨ = ٢، ٢ + ١ = ٣ توضع فى الناتج

(٣) الخانة الثالثة ٤ تصبح ٣ لأننا استقلنا منها ١
٣ – ٢ = ١ توضع فى الناتج.

وهذه الطريقة ما زال معمولا بها ويستخدمها بعض المدرسين.

مثال (٢) : (الاستلاف والاضافة إلى العدد المطروح منه)
اطرح ٢١٢٢ – ١١٣٤

ويسير الحل كالآتى :

٢ ١ ٢ ٢
٢~~١~~ ٢~~١~~ ٤~~٣~~ ٤
٩ ٨ ٨

(١) ٢ – ٤ لا يصح، نستلف ١ من خانة العشرات (٢) ونرده إلى
خانة العشرات فى العدد السفلى لتصبح ٤
ويكون ١٢ – ٤ = ٨ توضع فى الناتج

(٢) ٢ - ٤ لا يصح، نستلف ١ من خانة المئات (١) ونردها إلى خانة المئات فى العدد السفلى لتصبح ٢
ويكون ١٢ - ٤ = ٨ وتوضع فى الناتج.

(٣) ١ - ٢ لا يصح، نستلف ١ من خانة الآلاف (٢) ونرده إلى خانة الآلاف فى العدد السفلى لتصبح ٢
ويكون ١١ - ٢ = ٩ وتوضع فى الناتج

(٤) ٢ - ٢ = صفر
وبذلك يكون باقى الطرح = ٩٨٨

ويبدو أن هذه الطريقة استخدمت عند الرياضيين العــرب مثــل القلصاوى (١٤٧٥م.)

وكان بعض الكتاب العرب يضعون باقى الطرح من أعلا وليس من أسفل كما هو المتبع حاليا.

مثال (٣): (الطرح من اليسار إلى اليمين):
ويتضح ذلك من عملية الطرح ٥٦٢٥ - ٨٣٩

حيث يسير الحل فى الخطوات التالية:

(١) ٥٦٢٥
- ٨٣٩
٥٦ - ٨ = ٤٨

(٢) ٨٨٢٥
- ٣٩
٨٢ - ٣ = ٧٩

(٣) ٤٧٩٥
- ٩
٩٥ - ٩ = ٨٦

٤٧٨٦ وهو باقى الطرح

الاسلام مصر للطباعة

عملية الضرب :

نشأت عملية الضرب كعملية جمع تكرارى ومضـــاعفات لـــلأعداد الصحيحة.

مثال (١) : الطريقة المصرية القديمة، كما وردت فى ورقة بردى رانيد)

اعتمدت هذه الطريقة على عملية التضعيف وجمـــع المضـــاعفات فمثلا فى حالة ضرب ١٧ × ١٥ كان العمل يسير كالآتى (مع مـــراعاة أننا هنا نستخدم الرموز الحالية) :

١٧	١	
٣٤	٢	ضاعف ١٧ × ٢ = ٣٤
٦٨	٤	ضاعف ٣٤ × ٢ = ٦٨
١٣٦	٨	ضاعف ٦٨ × ٢ = ١٣٦
٢٥٥	١٥	

١٧ × ١ = ١٧

ويكون حاصل الضرب هو ٢٥٥

وقد تم الحصول عليه من جمع ١٧ + ٣٤ + ٦٨ + ١٣٦

المناظرة للأعداد ١ + ٢ + ٤ + ٨

وخلاصة المعنى أن حاصل ضرب ١٧ × ١٥ هو تكرار ١٧ عدة مرات قدرها ١٥ وأحيانا كان قد قدماء المصريين يكررون العدد ١٧ عدة مرات قدرها ١٦ ثم يطرحون من الناتج العدد ١٧ كما يلى :

الاسلام مصر للطباعة

١٧	١	
٣٤	٢	
٦٨	٤	
١٣٦	٨	
٢٧٢	١٦	← العدد ١٧ مكرر ١٦ مرة
١٧ –	١	← العدد ١٧ مكرر مرة واحدة
٢٥٥	١٥	← العدد ١٧ مكرر ١٥ مرة

مثال (٢) : (طريقة المعداد) :

لم يكن المعداد يحتاج إلى رمز للصفر. وكانت عملية الضرب تتم على جدول يشبه لوحة الشطرنج كما يتضح من المثال التالى :

لضرب ٤٦٠٠ × ٢٣، والذى ظهر فى وثائق تعود للقرن الخامس عشر، ويتضح فيها أثر الرموز الرومانية وبداية استخدام الحروف العربية مع اختلاف عن الطريقة الحالية فى وضع المضروب والمضروب فيه والناتج وترك الخانات شاغرة (بدلا من وضع الأصفار).

	CM (مئات الألوف)	XM (عشرات الآلاف)	M (آلاف)	C (مئات)	X (عشرات)	I (آحاد)
٤٦٠٠			٤	٦		
٣ × ٦			١	٨		
٢ × ٦		١	٢			
٣ × ٤		١	٢			
٢ × ٤		٨				
حاصل الضرب	١		٥	٨		
× ٢٣					٢	٣

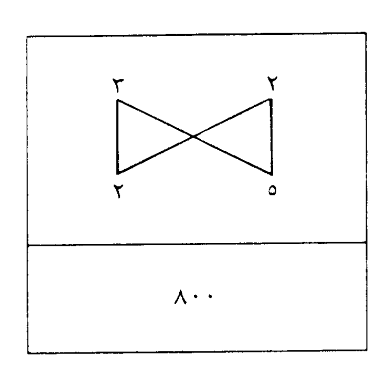
وبذلك يكون ٤٦٠٠ × ٢٣ =١٠٥٨٠٠

الاسلام مصر للطباعة

مثال (٣) : (الضرب التصالبى)

وهى على نفس الطريقة التى تستخدم فى ضرب المقادير الجبرية وقد استخدمها باسيولى (١٤٩٤ م.) فى كتابه الذى أطلق عليه Sima. والطريقه صعبة وتحتاج إلى قدرات عددية كبيرة خاصة إذا كانت الأعداد مكونه من أرقام عديدة.

وكمثال اعتبر حالة الضرب ٣٢ × ٢٥

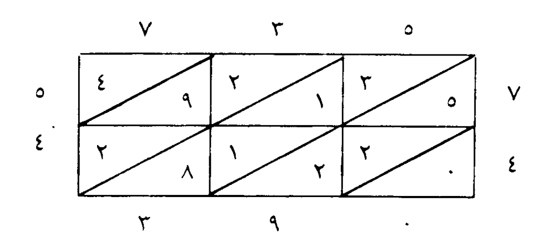


ويتم العمل بضرب ٥ × ٢، ٥ × ٣٠، ٢٠ × ٢، ٢٠ × ٣٠ والجمع مباشرة وربما يكون ذلك هو الذى أوحى باستخدام علامة الضرب المتسخدمة حاليا × للرمز على عملية الضرب والتى استخدمها الرياضى رايت ومعاصروة فى عام ١٦١٨ م.

مثال (٤) : (طريقة الشبكة)

وكانت هذه الطريقة محببة لدى الكثيرين من الهنود والعرب والصينين والأوربيين ولنأخذ مثالا لعملية الضرب ٧٣٥ × ٧٤

الاسلام مصر للطباعة

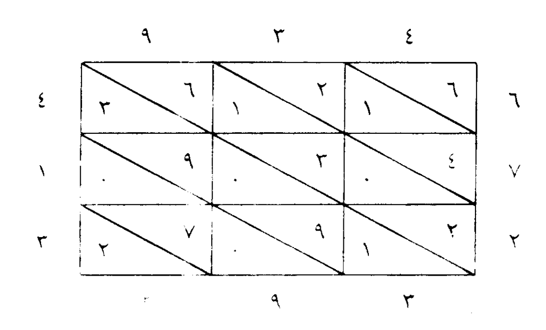


ومع مراعاة طريقة كتابة الأعداد ٧٣٥ (أعلا)، ٧٤ (على اليمين والآحاد أسفل العشرات) وتقسيم حواصل الضرب إلى خانات كما بالشكل وجمع الخانات القطرية نجد أن:

٥٤٣٩٠ = ٧٤ × ٧٣٥

ويمكن تغيير طريقة الكتابة كما يلى:

٣١٤ × ٩٣٤



ومع مراعاة النواتج الناشئة من حواصل الجمع القطرية خارج الشبكة نجد أن:

٢٩٣٢٧٦ = ٣١٤ × ٩٣٤

الاسلام مصر للطباعة

مثال (٥) : طريقة التجزىء :

وقد استخدمت هذه الطريقة عند الاغريق والعرب وكمثال لهذه الطريقة نبحث حاصل ضرب ٢٦٥ × ١٤٣. ونبدأ من اليسار إلى اليمين :

	٢	٦	٥
ابدأ الضرب فى ١ (المئات)	①	٤	٣
الضرب فى ١٠٠	٢٠٠٠٠	٦٠٠٠	٥٠٠
الضرب فى ٤	٨٠٠٠	٢٤٠٠	٢٠٠
الضرب فى ٣	٦٠٠	١٨٠	١٥
٣٧٨٩٥ =	٢٨٦٠٠	٨٥٨٠	٧١٥

أى أن ٢٦٥ × ١٤٣ = ٣٧٨٩٥

وتجدر الاشارة إلى أنه كان من المتبع العودة إلى جداول الضرب المعدة مسبقا للاستعانة بها فى إجراء عمليات الضرب لأعداد كبيرة.

عملية القسمة :

تعتبر عملية القسمة أكثر العمليات الحسابية الأساسية صعوبة، وكانت دائما من أكثر العمليات التى يتم التدريب عليها لمن يعملون فى التجارة والحسابة بصفة عامة. وكان باسيولى (١٤٩٤م.) يقول «إذا استطاع الشخص أن يكون ماهرا فى إجراء عملية القسمة فإن كل شىء آخر يكون سهلا عليه لأنه متضمن فيها».

ومن السهل أن نستخف اليوم بعمليات القسمة باعتبارها عمليات بسيطة. لكن علينا أن نتذكر أن جمع وطرح الأعداد الصحيحة كان يدرس فى القرن الخامس عشر الميلادى فى جامعات أوروبية قليلة، وأنه كان على من يريد دراسة عمليات الضرب أن يتقدم إلى أرقى

الاسلام مصر للطباعة

الجامعات الايطالية آنذاك، وأن قسمة الأعـداد الصـحيحة كانـت تخصصا رفيعا فى الجامعات. كان هذا منذ خمسمائة عام فقط، وكان كتاب «الجبر والمقابلة» موضوعا يخص كبار العلماء فقط.

ونعرض فيما يلى بعض طرق القسمة التى ظهرت تاريخيا:

مثال (١) : (طريقة قدماء المصريين)

يحتمل أن تكون هذه أقدم طريقة للقسمة وكانـت تعتمـد علـى التضعيف والتصنيف وتتضح فى المثال التالى:

اقسم ١٩ ÷ ٨

نبحث عن أعداد تقترب فى ٨ بحيث يكون الناتج هو ١٩ ونسـير كالآتى:

	١	٨	
١٦ = ٢ × ٨ ⟶	٢	١٦	⟵
	$\frac{١}{٢}$	٤	
٢ = $\frac{١}{٤}$ × ٨ ⟶	$\frac{١}{٤}$	٢	⟵
١ = $\frac{١}{٨}$ × ٨ ⟶	$\frac{١}{٨}$	١	⟵
$\frac{١}{٨}$ + $\frac{١}{٤}$ + ٢ ⟵	٢$\frac{٣}{٨}$	١٩	

ويكون خارج قسمة ١٩ ÷ ٨ **هو** ٢$\frac{٣}{٨}$

ذلك لأن:

١٩ = ١٦ + ٢ + ١

، ١٦ = ٢ × ٨

، ٢ = $\frac{١}{٤}$ × ٨

، ١ = $\frac{١}{٨}$ × ٨

مثال (٢) : (طريقة جربرت)

تنسب هذه الطريقة إلى جربرت (٩٨٠ م.) وقد ظهرت كأحد طرق ثلاثة عرضها اديلارد أوف باث (١١٢٠ م.) وهى شبيهة بطريقة القسمة المطولة وتتضح فى المثال التالى :

اقسم ٩٠٠ ÷ ٨

تجرى العملية بوضع ٨ = ١٠ – ٢

وتتم القسمة كما فى حالة القسمة على مقدار جبرى كالآتى :

المقسوم عليه		الناتج
١٠ – ٢	٩٠٠	٩٠ + ١٨ + ٣ + ١ + $\frac{٤}{٨}$ = ١١٢$\frac{١}{٢}$

٩٠٠ – ١٨٠
―――――
١٨٠
١٨٠ – ٣٦
―――――
٣٦
٣٠ – ٦
―――――
٦ + ٦ = ١٢
١٠ – ٢
―――――
٢ + ٢ = ٤

وتتضح الخطوات فى الآتى :

(١) تقسم ٩٠٠ ÷ ١٠ فيكون الناتج ٩٠

(٢) تضرب ٩٠ × ١٠ = ٩٠٠، ٩٠ × –٢ = –١٨٠

(٣) تطرح ٩٠٠ – (٩٠٠ – ١٨٠) = ١٨٠

(٤) تقسم ١٨٠ ÷ ١٠ = ١٨

(٥) تضرب ١٨ × ١٠ = ١٨٠، ١٨ × –٢ = –٣٦

(٦) تطرح ١٨٠ − (١٨٠ − ٣٦) = ٣٦
(٧) تقسم ٣٦ ÷ ١٠ فيكون أقرب عدد صحيح ناتج هو ٣
(٨) تضرب ٣ × ١٠ = ٣٠، ٣ × −٢ = −٦
(٩) تطرح ٣٦ − (٣٠ − ٦) = ٦ + ٦ = ١٢
(١٠) تقسم ١٢ ÷ ١٠ فيكون أقرب عدد صحيح ناتج = ١
(١١) تضرب ١ × ١٠ = ١٠، ١ × −٢ = −٢
(١٢) تطرح ١٢ − (١٠ − ٢) = ٢ + ٢ = ٤ وهو الباقى
(١٣) $\frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$
(١٤) وبذلك يكون الناتج من خارج القسمة هو
٩٠ + ١٨ + ٣ + ١ + $\frac{١}{٢}$ = ١١٢$\frac{١}{٢}$

مثال (٣): (طريقة القسمة على العوامل)

وقد استخدمت هذه الطريقة فى العصور الوسطى وتعتمد على قسمة العدد المقسوم علىعوامل المقسوم عليه كما فى المثال التالى:

إقسم ٢١٦ ÷ ٢٤

ويسير العمل كالتالى:

٢٤ = ٨ × ٣

٢١٦ ÷ ٨ = ٢٧

٢٧ ÷ ٣ = ٩

لذلك

٢١٦ ÷ ٢٤ = ٩

مثال (٤):

وهناك طرق أخرى عديدة كانت مشهورة قبل عام (١٦٠٠ م) مثل طريقة « جالى » أى « السفينة الشراعية » لأن الخطوات التى تتم بها العملية تجعل شكل العملية الحسابية على شكل سفينة وذلك لكثرة

الاسلام مصر للطباعة

تفاصيلها .كذلك استخدم العرب طرقا طريفة بعضها معقد وبعضها يدل على إبداع العقل العربى فى العمليات الحسابية ، ويمكن الرجوع فى ذلك إلى كتب مثل كتاب « تحفة الأحباب فى علم الحساب » للماردينى » .

ومن أمثلة الطرق العربية القريبة جدا من طريقة القسم المـطولة الحالية، والتى اسـتخدمت منذ عصر الخوارزمى فى الطـريقة التـى تتضح من المثال التالى :

اقسم ١٧٢٩ ÷ ١٢

وكان العمل يسير كالتالى :

		١	٤	٤	الناتج
المقسوم ←	١ ١ ٠	٧ ٢	٢	٩	
		٥ ٤ ١	٨		
			٤ ٤ ٠	٨	
				١	الباقى
المقسوم عليه ←	١	١ ٢	١ ٢	٢	

ومن ذلك يكون

١٧٢٩ ÷ ١٢ = ١٤٤ والباقى ١

وتتضح الخطوات فيما يلى:

١٧ ÷ ١٢ = ١ والباقى ٥

٥٢ ÷ ١٢ = ٤ والباقى ٤ ... وهكذا.

مع ملاحظة أن نتحرك بالمقسوم عليه خانة إلى الأمام فى كل مرة.

ثانيا: مزيد من الأعداد

مهدت عملية العد إلى ظهور الأعداد الطبيعية ١، ٢، ٣، ٤، ٥،... ثم كان من الطبيعى أيضا أن يبحث الانسان عن عدد يعبر به عن الخانة الشاغرة فكان أن انضم الصفر إلى مجموعة الأعداد التى يتعامل بها. وظلت الأعداد الطبيعية تفى بحاجات الانسان البدائى إلى فترة تعود تقريبا إلى بداية الحقبة التاريخية حينما احتاج إلى القياس والوزن، وبالتالى إلى تحديد المقاييس والموازين تحديدا قياسيا. وقد يبدأ الانسان فى أول الأمر إلى استخدام أصبعه أو ذراعه فى القياس ثم يكتشف بعد ذلك عندما يتسع التبادل أن أصابع الناس وأذرعهم تختلف فى الطول. ومن هنا تنشأ الحاجة إلى وحدة قياسية إذا أريد تركيب وتر للقوس أو رأس للفأس أو لوح خشب لقارب صيد. وبالطبع كانت هذه الوحدات اصطلاحية تماما. ولقد نشأت وحدات قياسية مختلفة ترتبط بعضها ببعض، بعلاقات حسابية بسيطة. ومن هذا الوضع نشأت فى تاريخ البشرية قضيتان بالغتا الأهمية:

أولا: فكرة التجريد المترتبة على القياس. فنحن إذ نقيس قطعة الخشب إنما نمارس نوعا من التجريد بالتركيز على البحث عن الطول

دون أن نهتم بلون قطعة الخشب أو نوعها. وينطبق هذا أيضا على الوزن. وفى النهاية لابد أن ينتهى هذا بنا إلى مفهوم الكمية البحتة Pure Quantity. فهكذا ينفصل العدد فى تاريخ الفكر البشرى عن الشىء المعدود أو المقاس أو الموزون ويصبح ذا قيمة بذاتها وتلك أولى خطوات علم الحساب.

ثانيا : لقد حاول الانسان أن يعتمد على وحداته القياسية فى القياس ثم بدأ يكتشف أن هناك أشياء مقاسة أصغر من هذه الوحدات ، فابتكر وحدة أصغر ، لكنه وجد أشياء مقاسة أصغر من هذه الوحدات المبتكرة مما اضطره فى نهاية الأمر أن يعترف بالكسور ، أى وجود أعداد أصغر غير الأعداد الطبيعية يعبر بها عن احتياجاته . وكانت هذه بداية ابتكار أنواع من الأعداد « غير الطبيعية » . بل إنه بزيادة احتياجات الانسان وتعقد العمليات العقلية التى يقوم بها وجد الانسان نفسه أمام أعداد ليست صحيحة وليست كسورا مثل $\sqrt{٢}$ وأطلق عليها اسم الأعداد الصماء ثم بدأ يحل المعادلات من الدرجة الثانية ثم الدرجة الثالثة ، ووجد نفسه أمام حلول لا يمكن التعبير عنها بما يعرفه من أعداد ، فابتكر الأعداد السالبة . ومع تعقيد المشكلات الرياضية التى كان يحلها كان عليه أن يبتكر أعدادا أخرى مثل الأعداد المتسامية وعبر النهائيه . ثم الأعداد التخيلية (غير الحقيقية) . وبعد ذلك ابتكر كيانات رياضية جديدة مثل المتجهات والمصفوفات والتسورات والرباعيات . وسنعرض فيما يلى للجذور التاريخية لبعض أنواع الأعداد غير الطبيعية .

الكسور العادية

على الرغم من وجود أعداد كسرية عند البابليين، إلا أن أول معالجة جيدة لفكرة الكسور هى تلك التى وجدت فى كتاب أحمس الذى يعود إلى حوالى عام ١٥٥٠ قبل الميلاد فى مصر القديمة. وتدل

الجداول الموجودة فى كتاب أحمس على أنه كانت للمصريين القدماء خبرة طويلة بفكرة الكسور.

والمظهر الأســاس للكسور عند قدماء المصريين هو الكسر الـذى بسطه الواحد الصحيح مثل $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤٢}$ والتى يطلق عليها اسم كســور الوحدة. وكانت معالجة الكسر عند أحمس قريبة من فـكرة النسـبة، فالكسر $\frac{٢}{٤٣}$ عنده كان يعنى شيئا قريبا من ٢ : ٤٣ أو ضـعف $\frac{١}{٤٣}$ وكان يعبر عنه كالآتى :

$$\frac{٢}{٤٣} = \frac{١}{٤٢} + \frac{١}{٨٦} + \frac{١}{١٢٩} + \frac{١}{٣٠١}$$

وفى **كتاب أحمس**، كان الكسر $\frac{١}{٤٢}$ يعبر عنه بـالرمز [رمز] حيـث النقطة كانت تدل على شرطة كسر الواحد، والرمز [رمز] كان يعنى ٤٢ باللغة الهيراطيقية القديمة، والرمز [رمز] يعنى ٢.

ومن الغريب أن بعض الكتب الانجليزية التـى كتبـت فى القـرن الثامن عشر كانت تستخدم النقطة فى الكسور حيث وجد (·/٢) لتعنى $\frac{١}{٢}$، (·/٤) لتعنى $\frac{١}{٤}$.

وقـد ظلت طريقة أحمس فى تجـزىء الكســور تعلم فى المعـابد المصرية القديمة كما دلت على ذلك بردية أخميم التى تعـود إلـى القـرن الثامن الميلادى بل استمرت أيضا إلى القرن العاشر حيـث اسـتخدمها الرياضى المصرى سـعدى بن يوسف الفيومى (حـوالى ٩٤٠م) فى حسابات المواريث.

وقد وجدت جداول مصرية للكسور تعود إلى القرن الرابع الميلادى تعبر عن كسور بالوحدة حتى $\frac{١}{١٠}$ للأعداد من ١ إلى ٩ ثم العقود من ١٠ إلى ٩٠ ثم للمئات من ١٠٠ إلى ٩٠٠ ثم للآلاف من ١٠٠٠ إلى ٩٠٠٠، ثم تعطى $\frac{١}{١١}$، $\frac{١}{١٢}$، ....، $\frac{١}{١٧}$ من نفس الأعداد. فمثلا :

$\frac{١}{٩}$ العدد ٥٠ أعطى فى هذه الجداول على أنه ٥ $\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{١٨}$

، $\frac{١}{١١}$ من العدد ٩ أعطى فى هذه الجداول على أنه $\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٤}$ $\frac{١}{٢٢}$ $\frac{١}{٤٤}$

الاسلام مصر للطباعة

وقد وضع فيبوناتشي فى القرن الثانى عشر قاعدة لتجزىء الكسور بصفة عامة والتى تعتبر تجزىء الكسور إلى كسور الوحدة حالة خاصة منها. ومن بين القواعد المعروفة لتجزىء الكسور القاعدة التالية :

ليكن الكسر هو $\frac{\text{أ}}{\text{ب حـ}}$

وليكن $\text{ب} + \text{حـ} = \text{ك أ}$

فى هذه الحالة :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب} \times \frac{\text{ب} + \text{حـ}}{\text{أ}}} + \frac{\text{١}}{\text{حـ} \times \frac{\text{ب} + \text{حـ}}{\text{أ}}} \qquad (\text{١})$$

فمثلاً :

اعتبر الكسر $\frac{\text{٢}}{\text{١٥}}$

$$\frac{\text{٢}}{\text{١٥}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣} \times \text{٥}}$$

بالتعويض فى (١) يكون

$$\frac{\text{٢}}{\text{١٥}} = \frac{\text{١}}{\text{٣} \times \frac{\text{٨}}{\text{٢}}} + \frac{\text{١}}{\text{٥} \times \frac{\text{٨}}{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{١٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٢٠}}$$

وقد كان للاغريق والرومان طريقتهم فى كتابة الكسور ولكنهم تفادوا صعوبة التعامل بالكسور.

ويحتمل أن الصورة الحالية فى كتابة الكسور تعود إلى الهنود ولكنه من الثابت أن العرب هم أول من استعملوا شرطة الكسر وإن لم تستخدم بواسطة جميع الرياضيين العرب فى العصور الوسطى كما أن شرطة الكسر لم تستخدم أيضا فى بعض الكتابات الأوربية حتى القرن السادس عشر. كذلك فإن استخدام كلمتى البسط والمقام يعود إلى العرب وقد قلدهم الأوربيون فى تلك التسمية.

الاسلام مصر للطباعة

والمثال التالى يوضح طرق جمع الكسور فى القرن الخامس عشر:

إجمع $\frac{٥}{٦} + \frac{٣}{٨}$

الحـل:

١٨ ٤٠

$\frac{٥}{٦}$ ✕ $\frac{٣}{٨}$

١٠

٥٨ | $\frac{٥}{٢٤}$ ١

٤٨

ويلاحظ هنا استخدام حاصل ضرب المقامين كمضاعف مشترك ثم اختزال الناتج

والمثال التالى يوضح طرق ضرب الكسور فى نفس القرن الخامس عشر:

إضرب $\frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٤}$.

الحـل:

$\frac{٣}{٤}$ ——— $\frac{٤}{٥}$

$\frac{١٢}{٢٠}$

ومن الواضـح أن هذه الطريقة هى نفسـها الطريقة الحالية فيما عـدا طريقة الكتابة. وقد أعطى الرياضى العربى الكوفى فى القـرن الحادى عشر الميلادى طريقة الحـل التالية التى تمثل بعض الطرق التى كان يستخدمها العرب:

$$\frac{ا}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{\frac{اجـ}{ب}}{د} = \frac{\frac{اجـ}{د}}{ب}$$

فمثلا: $\frac{٢}{٢} \times \frac{٥}{٧} = \frac{\frac{١٠}{٣}}{٧} = \frac{\frac{١٠}{٧}}{٣}$

وبالنسبة لقسمة الكسور فقد استخدمت عدة طرق قبـل الـوصول إلى الطريقة الحالية وهى الضرب فى مقلوب المقسوم عليه.

والمثال التالى يوضح احدى هذه الطرق والتى استخدمت فى القرن الخامس عشر:

$$\frac{٢}{٣} \div \frac{٣}{٤} = \frac{٨}{١٢} \div \frac{٩}{١٢} = \frac{٨}{٩}$$

وجوهر الطريقة هو تحويل الكسرين إلى كسرين متحدى المقامات ثم قسمة البسط الأول على البسط الثانى.

والمثال التالى يوضح طريقة أخرى لقسمة $\frac{٢}{٣} \div \frac{٣}{٤}$

ظهرت فى بعض كتب القرن السادس عشر فى أوربا.

$$\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٩}{٨}$$

وهى تعتمد على الضرب التصالبى ولكنها فى جوهرها عبارة عن الضرب فى مقلوب المقسوم عليه.

وطريقة الضرب فى مقلوب المقسوم عليه كانت مستخدمة عند الهنود والعرب واختفت قرابة أربعة قرون ثم عاد استخدامها بعد ذلك وحتى الآن.

الكسور العشرية:

ظهرت الكسور العشرية متأخرة قرابة الألف عام بعد ظهور نظام العد العربى.

وقد بدأت فكرة هذه الكسور مرتبطة بتقريب الجذور التربيعية للأعداد غير المربعة مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣٧}$. ففى القرن الثانى عشر ظهرت هذه التقريبات العشرية للجذور عندما كان من المعتاد أن ينظر إلى $\sqrt{٢}$ مثلا على أنه $\frac{\sqrt{٢٠٠٠٠}}{١٠٠}$ أو $\frac{\sqrt{٢٠٠٠٠٠٠}}{١٠٠}$ وكانت تعطى قيما مثل $\frac{١٤١}{١٠٠}$ أو $\frac{١٤١٤}{١٠٠٠}$. ولقد كانت هذه الفكرة معروفة فى الشرق عند اليهود والعرب (ففى كتاب الكوفى شرح مفصل لكيفية تقريب الجذور

التربيعية). وقد أعطى الرياضى والفلكى العربى غياث الدين الكاشى (عام ١٤٣٠م. تقريبا) قيمة للعدد ط (النسبة التقريبة) محسوبة إلى ١٦ رقما عشريا وهى درجة من التقريب لم يسبقه إليها أحد، وقد وضعها الكاشى فى كتابه «رسالة المحيطية» الذى كان يحسب فيه النسبة بين محيط الدائرة وقطرها بالصورة:

٣٤١٥١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٨٧٣٢ ووضع كلمة صحاح (صحيح) فوق ٣ ولكنه لم يستخدم علامة عشرية بل كان يفصل بين العدد الصحيح والكسور العشرية. وفى عام ١٥٢٢م. وضع الرياضى الألمانى آدم ريس جداولا للجذور التربيعية مضروبة فى ١٠٠٠ فقد ظهر √٢ مثلا على أنه ١٤١٤ وقدظهرت الأعداد الصحيحة فى عمود منفصل عن عمود الأجزاء العشرية. وفى عام ١٥٣٠ وضع الرياضى الألمانى رادولف جداولا للفوائد المركبة تضمنت كسورا عشرية. وكان رادولف يستخدم الشرطة الرأسية كعلامة أو فاصلة عشرية فمثلا ٣,٤ كانت تكتب ٣|٤. وقد استخدم الرياضى الفرنسى ڤيتا (عام ١٥٧٩م) الكسور العشرية بطريقة منظمة ودعا إلى استخدامها فى سائر الكتب الرياضية، وكان يستخدم الفاصلة والشرطة الرأسية كعلامات عشرية.

وعلى الرغم من الاستخدامات السابق الاشارة إليها إلا أن كثيرا من المؤرخين ينسبون اختراع الكسور العشرية إلى الرياضى الهولندى سيمون ستيڤن (Stevin) الذى نشر فى عام ١٥٨٥م كتيبا من سبع صفحات شرح فيه الكسور العشرية وأوضح قواعد إجراء العمليات الحسابية عليها. وقد ترجمت أفكار ستيڤن وانتشرت عبر القارة الأوروبية بواسطة رياضيين مثل السويسرى بورجى (عام ١٥٩٢م) والألمانى باير (١٦٠٣م) وقد كان ستيڤن يكتب الأعداد العشرية مثل ٥,٩١٢ كالآتى:

٠١٢٣
٥٩١٢ حيث يضع (صفر) فوق العدد الصحيح، (١) فوق الرقم

العشرى الأول، (٢) فوق الرقم العشرى الثانى، (٣) فوق الرقم العشرى الثالث... كما كان يكتب نفس العدد بصورة أخرى كالآتى:

٥ (٠) ٩ (١) ١ (٢) ٢ (٣)

وقد كانت هناك طرق عديدة لفصل العدد الصحيح عن الكسور العشرية وقد كان لظهور جداول اللوغاريتمات التى وضعها نابير Napier (عام ١٦١٤م) أثره القوى على استخدام الكسور العشرية.

وقد استخدم نابير العلامة العشرية (,) كما استخدم رموزا أخرى مثل ″٥′٢ ,٨ للدلالة على العدد العشرى ٨,٢٥.

ومن الملاحظ أنه حتى عصرنا الحاضر لا يوجد اتفاق على رمز موحد للعلامة العشرية فى جميع اللغات فهناك من يستخدم الفاصلة (,) كما فى اللغة العربية والفرنسية وهناك من يستخدم النقطة كما فى اللغة الانجليزية.

وإلى جانب الكسور العادية والعشرية فقد ظهرت أيضا الكسور الستينية أى الكسور التى مقاماتها ٦٠، ($٦٠^٢$)، ($٦٠^٣$)... والتى استخدمت حتى العصور الوسطى وعصر النهضة فى بعض الكتابات الغربية والتى بدأت عند البابليين فى أزمنة تعود إلى عام ٢٠٠٠ قبل الميلاد.

الأعداد الصماء:

كانت الأعداد الصماء هى النوع الثانى من الأعداد غير الطبيعية ـ بعد الكسور ـ التى اكتشفها الانسان. فقد اكتشف الفيثاغوريون فى القرن الخامس قبل الميلاد أن النسبة بين طول قطر المربع وطول ضلعه لا يمكن أن تكون عددا صحيحا أو نسبيا، فالعدد النسبى هو ما يمكن التعبير عنه على صورة $\frac{م}{ن}$ حيث م، ن أعداد صحيحة وليست صفرا ولكن إذا فرضنا مع الفيثاغوريين أن لدينا مثلثا قائم الزاوية

الاسلام مصر للطباعة

فيه ضلعان متســاويان فوفقا لنظرية فيثــاغورس يــكون $(\overline{\text{اب}})^{٢}$ = $(\overline{\text{اح}})^{٢}$ + $(\overline{\text{بح}})^{٢}$

ا

ح ب

وإذا اعتبرنا أن اح هو وحـــدة القياس فإن $(\overline{\text{اب}})^{٢}$ = ١ + ١ = ٢ ومن هنا من الطبيعي أن يتساءل الفيثاغوريون عن طول $\overline{\text{اب}}$، أى عــن العدد النسبى الذى إذا ضرب فى نفسه أعطانا العدد ٢. ولقد بــذلت جهود ضخمة للحصول على هذا العدد: وفى النهاية بدأ المأزق عندما اكتشف الفيثاغوريون ببرهان بسيط أن هذا العـــدد النســـبى غيـــر موجود. والبرهان كما يلى:

نفرض أن $\sqrt{٢}$ يمكن التعبير عنه فى صورة عدد نسبى $\frac{م}{ن}$ حيــث م، ن أعــداد صحيحة وحيث لا توجد عوامل مشتركة بين م، ن فإن وجدت يجرى اختصارها قبل بدء البرهان

إذن $\frac{م}{ن} = \sqrt{٢}$ وبتربيع الطرفين $\frac{م^{٢}}{ن^{٢}} = ٢$

$م^{٢} = ٢ن^{٢}$

إذن $م^{٢}$ عدد زوجى لأنه ضعف عــدد صحيح، وبالتالى فإن م هى عــدد زوجى أيضـــا وليكن ٢ك حيث ك عــدد صحيح وبالتعويض فى $م^{٢} = ٢ن^{٢}$ نجد أن

$٤ك^{٢} = ٢ن^{٢}$ أى أن $ن^{٢} = ٢ك^{٢}$ = عدد زوجى

إذن ن عــدد زوجى، وبهذا يكون بين م، ن عامــل مشترك وهــو العدد ٢، وهذا يناقض الفرض.

ولقد كان أمام مدرسة فيثاغورس أحد طريقين للخروج من هــذا

الاسلام مصر للطباعة

المأزق. إما أن تكون فكرة القياس غير حقيقية، أو أن يوسع مفهوم العدد ليتضمن الأعداد غير النسبية (الأعداد الصماء). ولقد اختارت مدرسة فيثاغورس الحل الأول مما أدى بالفعل إلى إبعاد فكرة القياس عن الهندسة والبحث عن براهين مستقلة للنظريات الهندسية، أى إلى العزل بين الحساب والهندسة والاكتفاء بدراسة الهندسة دراسة وصفية. أما أن يكون الحساب هو الخيط العام الذى يربط الهندسة فقد أقفل هذا الباب الخصب مؤقتا ولم يفتح مرة أخرى إلا على يد ديكارت فى القرن السابع عشر.

ويعود وصف أعداد مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ بأنها أعداد صماء إلى الرياضيين العرب، فقد تحدث الخوارزمى (٨٢٥م.) عن الأعداد النسبية كأعداد ناطقة، وعن الأعداد النسبية كأعداد صماء والتى وصفت أيضا بأنها أعداد لا يمكن التعبير عنها، وأنها أعداد ليست لها جذور، وبأنها أعداد بدون نسبة وبأنها غير قابلة للقياس.

وقد استحوزت الأعداد غير النسبية ـ من حيث طبيعتها وطرق التعامل معها ـ على اهتمام الرياضيين منذ عهد فيثاغورس فى القرن الخامس قبل الميلاد وحتى فايرستراس (Weirstrass) فى القرن التاسع عشر.

ومن بين الاهتمامات القديمة إيجاد قيما تقريبية لأعداد مثل $\sqrt{٢}$ ومن بين الطرق التى استخدمت فى العصور القديمة والوسيطة ما يمكن وصفه بالآتي لايجاد $\sqrt{ن}$:

حيث ن عدد غير مربع

ليكن $ن = ا^{٢} + ق$

القيم التقريبية، $ا_{١}$، $ا_{٢}$، $ا_{٣}$، ... للعدد $\sqrt{ن}$ نحصل عليها فى الخطوات التالية :

الاسلام مصر للطباعة

$ا_{١} = ا + \frac{ق}{٢ا}$

$ا_{٢} = \frac{ن}{ا_{١}} = ا + \frac{ق}{٢ا \times \frac{ق}{ا}}$ ، ...

فمثلا :

$\sqrt{٥} = (٢)^{٢} + ١$ (ا = ٢، ق = ١)

$ا_{١} = ٢ + \frac{١}{٤} = ٢,٢٥$ تقريب أول

$ا_{٢} = \frac{٥}{٢,٢٥}$ تقريب ثان

$ا_{٣} = \frac{٥}{٢,٢٢}$

وقد أعطى الرياضيون العرب (فى العصور الوسطى) التقريب

$ا_{١} = ا + \frac{ق}{٢ا + ١}$

أى أن $\sqrt{٥} = ٢ + \frac{١}{٤ + ١} = ٢\frac{١}{٥} = ٢,٢$

وقد استخدم أبو بكر الحصار (حوالى ١١٧٥م.) القاعدتين التاليتين :

(١) $\sqrt{ن} = ا + \frac{ق + ١}{٢ا + ٢}$

فمثلا $\sqrt{٥} = ٢ + \frac{١ + ١}{٤ + ٢} = ٢\frac{١}{٣}$

(٢) $\sqrt{ن} = ا + \frac{ق}{٢ا} = \frac{(ق/٢ا)^{٢}}{٢(ق + ق/٢ا)}$

فمثلا : $\sqrt{٥} = ٢ + \frac{١}{٤} - \frac{(\frac{١}{٤})^{٢}}{٢(١ + \frac{١}{٤})}$

$= ٢,٢٥ - ٠,٠٢٥ = ٢,٢٢٥$ وهو تقريب أفضل

وقـد أعطيت قواعـد مماثلة كثيـرة فى القـرنين الخـامس عشر والسادس عشر:

فمثلا أعطى أبو الحسن القلصاوى من علماء القرن الخامس عشر (التاسـع الهجرى) مؤلف كتابى «كشف الأسرار عن علم الغبـار»، «كشف الجلباب عن علم الحساب» القاعدة التالية لايجاد $\sqrt{ن}$:

$$\sqrt{ن} = \frac{٤ا^{٣} + ٣اق}{٤ا^{٢} + ق}$$

كما ظهرت قواعد لايجاد الجذر التكعيبى، فمثلا أعـطى سـتيفن القاعدة التالية:

$$\sqrt[٣]{ن} = ا + \frac{ق}{٣ا(ا + ١) + ١}$$

فمثلا: $٩ = ٨ + ١ = (٢)^{٣} + ١$

$$\sqrt[٣]{٩} = ٢ + \frac{١}{٦ \times ٢ + ١} = ٢ + \frac{١}{١٩} = ٢\frac{١}{١٩}$$

وقـد أعطيت معايير للتعرف على ما إذا كان عدد ما ن هو مربع كامل أم أن $\sqrt{ن}$ عدد أصم. ومن بين المعايير التى ظهرت فى بعض كتابات القرنين الخامس عشر والسـادس عشر أن المـربع الـكامل لا يمكن أن يكون رقم آحاده: ٢ أو ٣ أو ٧ أو ٨.

ويتضح هذا من أن:

$(١)^{٢} = ١$، $(٢)^{٢} = ٤$، $(٣)^{٢} = ٩$، $(٤)^{٢} = ١٦$، $(٥)^{٢} = ٢٥$، $(٦)^{٢} = ٣٦$، $(٧)^{٢} = ٤٩$، $(٨)^{٢} = ٦٤$، $(٩)^{٢} = ٨١$، $(٠)^{٢} = ٠$

وجميع هـذه المربعات رقم آحادها صـفر أو ١ أو ٤ أو ٥ أو ٦ أو ٩.

ومن بين المعايير أيضا أن المربع الكامل يكون إما بالصورة ٣ن أو ٣ن + ١ حيث ن عدد صحيح.

الاسلام مصر للطباعة

وقد انتقلت دراسة الجذور الصم والأعداد النسبية إلى علم الجبر وارتبطت بحل المعادلات حيث شملت الأعداد غير النسبية أعدادا أخرى مثل ط (TT)، هـ (e) التى تساوى تقريبا ٢,٧١٨٢٨١

ولعله من المناسب هنا القول بأن كلمة الجذر هى كلمة عربية أصلها جذر التى ترجمت فى الغرب إلى كلمات مناظرة مثل (root). وكان العرب يستخدمون الحرف الأول حـ للدلالة على الجذر التربيعى مثل ٢ تعنى $\sqrt{٢}$ كما كان الغربيون يستخدمون حروفا مناظرة مثل حرف r (أول حرب فى كلمة root) ومنها جاء الرمز $\sqrt{\ }$.

الأعداد السالبة:

كانت الأعداد السالبة هى النوع الثالث من الأعداد غير الطبيعية والتى ابتكرها الانسان ليحل بها مشكلات رياضية واجهته. وعلى الرغم من أن أول معالجة جادة للأعداد السالبة كأعداد معترف بها وردت فى القرن السادس عشر على يدى كاردان (Cardan) وستيفل (Stifell)، إلا أنه كانت هناك مراحل سابقة ظهرت فيها فكرة العدد السالب. وقد كانت الأعداد المطروحة أول المواقف التى ظهرت فيها فكرة الأعداد السالبة حيث وجد أن عمليات مثل (١٠ – ٤) (٨ – ٢) والتى تتضمن قاعدة الاشارات كانت معروفة قبل أن تعرف الأعداد السالبة نفسها. وكان الصينيون يستخدمون فكرة العدد السالب كعدد مطروح حيث كانوا يمثلون الأعداد الموجبة (المطروح منه) بقضبان حمراء والأعداد السالبة (المطروحة) بقضبان سوداء. ولم تظهر قاعدة الاشارات عند الصينيين قبل عام ١٢٩٩هـ. حيث قدمها أحد رياضيهم (شو – شاى – كيه) فى كتاب فى الجبر الابتدائى بعنوان مقدمة فى الدراسات الرياضية.

وقد وردت فكرة العدد السالب عند ديوفانتس الاغريقى (حوالى ٢٧٥م.) حيث تحدث عن المعادلة ٤س + ٢٠ = ٤ على أنها معادلة

سخيفة ومنافية للعقل لأنها تعطى س = – ٤ ومن ناحية أخرى فقد عرف الاغريق الصورة الهندسية المكافئة لأعداد مثل (ا – ب)[٢]. ونتائج عمليات مثل (– ب) (– ب) ولكن كأعداد مطروحة وليست كمعنى مجرد للعدد السالب وقد حذا الهنود والعرب حذو الاغريق فى هذا المجال حيث كانت تعالج الفكرة فى إطار الأعداد المطروحة وترفض الحلول السالبة.

فمن الواضح مثلا من كتاب الخوارزمى (الجبر والمقابلة) أن الجذور السالبة فى حلول معادلات الدرجة الثانية كانت مرفوضة.

وقد اتبع فيبوناتس (١٢٠٢م) العادة العربية فى عدم الالتفات للأعداد السالبة كحلول للمعادلات. ولكنه فى أحد مسائله المالية فسر أحد الحلول السالبة لتعنى «خسارة» بدلا من «المكسب».

وفى كتابه «الفن العظيم» اعترف كاردان (١٥٤٥م)* بالحلول السالبة للمعادلات وأعطى قوانين بسيطة وواضحة للتعامل بالأعداد السالبة.

وذكر ستيفل (١٥٤٤م) الأعداد السالبة كأعداد مميزة على أنها أعدادا أقل من الصفر، وأوضح طرق إجراء عملياتها وبذلك كانت قواعد إجراء العمليات على الأعداد السالبة معروفة ولكن الطبيعة الدقيقة للعدد السالب لم تكن دائما واضحة. ويعود الفضل إلى رجال مثل فيتا (Vietta)، هاريوت، فرمات (Fermat) ديكارت (Decarte)، هود (Hudde) من رياضى القرنين السادس عشر والسابع عشر فى الاعتراف والفهم الكامل لطبيعة العدد السالب. وينسب إلى هود (١٦٥٩م.) أنه أول من استخدم رمزا بدون إشارة ليدل على عدد موجب أو سالب.

ومن الناحية الرمزية فقد استخدم الهنود الذين أشاروا إلى الأعداد السالبة أو الأعداد المطروحة نقطة أو دائرة فوق أو بجانب

* كان كاردان أول من أشار إلى الحل العام لمعادلات الدرجة الرابعة.

تلك الأعداد مثل ٦ أو ٦̊ لتعنى (– ٦) (تنسب إلى باسكارا عام (١١٥٥م)). واستخدم الصينيون إلى جانب الألوان رموزا أخرى مثل IOTT = Ⲯ لتعنى – ١٠٧٢٤ (تنسب إلى لاى يه عام ١٢٥٩م). واستخدم كاردان تعبير «ناقص فى ناقص» يساوى «زائد» وكان يستخدم رموزا مثل (m: 3) لتعنى – ٣، وأطلق ستيفل (١٥٤٤م) مصطلح الأعداد السخيفة على الأعداد السالبة وكتب صفر – ٣ = – ٣ كمثال للأعداد «السخيفة».

وتحدث تارتاجليا (١٥٥٦م) عن العدد السالب على أنه «الحد الذى يبدأ بناقص»، واستخدم بومبلى Bombelli (LOVC) كلمة «ناقص» فى القاعدة «ناقص × ناقص = زائد». وكان رمز للعدد – ٥ مثلا هو (m.5) كما وضع رمزا للعد الموجب + ٥ حيث كان بكتبه (P5). واستخدم نابير (حوالى ١٦٠٠م) مصطلحات مثل أعداد زائدة وأعداد ناقصة للدلالة على الأعداد الموجبة والسالبة.

والمثال التالى يوضح كيفية الحساب بالأعداد السالبة فى القرن السادس عشر للعملية (٩ – ٢) (٨ – ٣). وسوف نستخدم للتوضيح الرمز ﺮﯜ بدلا من الحرف اللاتينى $\tilde{m}$ الذى كان يعنى «ناقص».

٩ ﺮﯜ ٢	المضروب
٨ ﺮﯜ ٣	المضروب فيه
٧٢ ناقص ٤٣ زائد ٦	
٣٥	حاصل الضرب

الأعداد التخيلية:

واجــه رياضيون قدامى مثل هيرون الاســكندرى (حوالى ٥٠م)، ديوفانتس الاغريقى (٢٧٥م) مشكلات فى حل معادلات تتضمن حلولا تخيلية مثل $\sqrt{٨١ - ١٤٤}$ أو إيجاد أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية محيطه ١٢ ومساحته ٧، وقد أهملوا تلك الحلول على أنها مســتحيلة دون الالتفات لوجود أعداد مثل $\sqrt{-٦٣}$. وكان ماها ڤيرا Mahavira الهندى (٨٥٠م) أول من عبر عن تلك الصعوبة بوضوح حيث ذكر أنه من طبيعة الأشياء أن الكميات السالبة لا يمكن أن تكون كمية مربعة ومن ثم لا يكون لها جذور تربيعية.

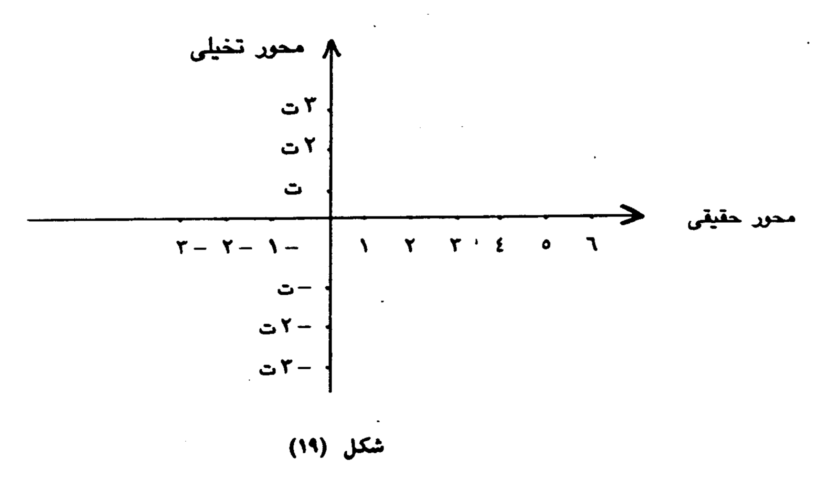
وكذلك تنبه العرب إلى الحالات التى يكون فيهــا الجــذر كميــة تخيلية ولكنهم أهملوها حيث تصبح المسألة «مستحيلة» كما جاء فى كتاب الخوارزمى (الجبر والمقابلة). وقد وردت مثــل تلك التعليقــات عند باسيولى Pacioli (١٤٩٤م) وشوكيه Chuquet (١٤٨٤م) الــذى قال بأن $\sqrt{-١}$ يمثل حالة مســتحيلة. وكان كاردان (١٥٤٥م.) أول من كانت لديه الشجاعة ليتعامل مع الجذور التربيعية للأعداد السالبة حينما كان يحل مسألة قوامها أن يقسم العدد ١٠ إلى جزأين حاصل ضربها ٤٠ حيث أعطى الحــل على أن العــددين المــطلوبين همــا $٥ + \sqrt{-١٥}$ ، $٥ - \sqrt{-١٥}$ وأطلق على أنها حلول بواسطة جذور النواقص وأثبت بضرب العددين الناتجين أنه حصــل علــى نتيجــة صحيحة. وأشار ستيڤن (١٥٨٥م) إلى أن موضوع الأعداد التخيلية لم يتم التمكن منه بعد. وكان علــى جيــرارد Girard (١٦٢٩م) أن يعترف بالجذور المركبة (التخيلية) لكى يبنى القانون الخاص بعــدد جذور معادلة ما، (مثلا المعادلة من الدرجة الأولى لها جذر واحــد، المعادلة من الدرجة الثانية لها جذران، معادلة الدرجة الثالثة لها ثلاثه جذور، ...)

كان واليس Wallis (١٦٧٣م) أول من فكر فى التمثيـل البيـانى للأعداد التخيلية، فبينما تمثل الأعداد الطبيعية والكسور والأعـداد غير النسبية والأعداد السالبة بنقط على خط مستقيم فقد فكر واليس فى تمثل الأعداد التخيلية بما أسماه بمساحات سالبة ومن هنا جاءته فكرة إمكانية تمثيل الأعداد المركبة بنقط فى المستوى واختيار محور السينات ليمثل أعدادا حقيقية والمحور الصادى ليمثل أعدادا تخيلية ورغم وصول واليس إلى هذه الفكرة إلا أنه لم يفعل شيئا لتنفيذها.

وكان ليبنز Leibniz (١٦٧٦م) من المهتميـن بـدراسة الأعـداد التخيلية حيث حلل المقدار $س^{٤} + ا^{٤}$ إلى

$$(س + ا\sqrt{-\sqrt{-١}})\ (س - ا\sqrt{-\sqrt{-١}})$$
$$\times\ (س + ا\sqrt{\sqrt{-١}})\ (س - ا\sqrt{\sqrt{-١}})$$

ورغم بدايات واليس وآخرين فإن الرياضى النرويجى كاسبار ڤيسيل Vessel (١٧٩٧م) كان أول من عالج تلك الأعداد معـالجة هنـدسية قوية وأصبح يمكن تمثيلها كما هو متبع حاليا وكما بالشكل (١٩).



شكل (١٩)

الاسلام مصر للطباعة

وينسب هذا التمثيل البيانى إلى رياضيين كثيرين أشهرهم أرجاند وجاوس من علماء أوائل القرن التاسع عشر.

ومن الناحية الرمزية والمصطلحات فقد كان كاردان يطلق على أعداد مثل ٥ + $\sqrt{-١٥}$ مصطلح «كميات سفسطائية».

وكان ديكارت أول من استخدم المصطلحات حقيقية وتخيلية. وكان معظم الرياضيين فى القرنين السابع عشر والثامن عشر يطلقون مصطلح «كمية تخيلية» على مقدار مثل ا + ب $\sqrt{-١}$ ولكن جاوس (١٨٣٢م) كان يسمى ا $\sqrt{-١}$ كمية تخيلية ويسمى ا + ب $\sqrt{-١}$ كمية مركبة.

وينسب إلى أويلر (١٧٤٨م) أنه أول من استخدم الرمز i والذى يقابل بالعربية ت للعدد $\sqrt{-١}$. وكان كوشى (١٨٢١م) أول من استخدم مصطلح الأعداد المترافقة لعددين مثل ا + ب ت، ا - ب ت ومصطلح المقياس للعدد $\sqrt{ا^٢ + ب^٢}$، وكان وايرستراس من رياضى القرن التاسع عشر هو الذى أسمى العدد $\sqrt{ا^٢ + ب^٢}$، على أنه القيمة المطلقة للعدد المركب ا + ب ت. وكان جاوس قبل ذلك يسمى المقدار $ا^٢ + ب^٢$ بأنه معيار العدد المركب ا + ب ت.

الفصل الثالث

نشأة علم الجبر

(الحضارات القديمة)

مع أن علم الحساب قد تقدم فى هدوء فى الحضارتين المصرية القديمة والبابلية ، ورغم التقدم الذى حققته « نظرية الأعداد » على يد مدرسة فيثاغورس ومدرسة الاسكندرية ، إلا أن علم الجبر ـ كعلم مستقل ـ لم يتقدم فى الحضارات الفرعونية والبابلية واليونانية . وثمة أدلة تاريخية على أن بذرة علم الجبر كانت فى طريقها إلى الظهور فى مصر القديمة . ففى ورقة بردى رايند تتناول بعض المسائل بما يمكن أن نسميه اليوم حلول معادلات الدرجة الأولى . ويؤكد تشايلد فى كتابه (الانسان يصنع نفسه) أن البابليين استطاعوا أن يحلوا فى لطف زائد مسائل عددية من معادلات الدرجة الثانية بطريقة إكمال المربع . وهى نفس الطريقة التى أحياها الخوارزمى بعد ذلك عند إنشاء علم الجبر بمعناه الحديث فى القرن الرابع الهجرى . ويذكر تشايلد فى كتاب آخر له أن البابليين تعرضوا لأمثلة عددية من معالات الدرجة الثالثة ويستدل على ذلك بالألواح التى عثر عليها .

ومع ذلك فلم يتقدم علم الجبر أى تقدم ملحوظ كعلم مستقل قبل الحضارة العربية الاسلامية. ولعل السبب فى هذا أن تقدم علم الجبر كان مرهونا بضرورتين من ضرورات هذا العالم الداخلية :

أولا : إيجاد لغة إصطلاحية (رمزية) بسيطة يمكن بها تبسيط العمليات وتركيزها.

ثانيا : اكتشاف الصفر وتطور مفهوم العدد ليشمل الأعداد الطبيعية والصحيحة ،والنسبية وغير النسبية والحقيقية والتخيلية.

الاسلام مصر للطباعة

وبدون هذا كان من المستحيل أن يتقدم علم الحساب خارج نطاق معين. وبدون تقدم علم الحساب استحال على علم الجبر أن ينشأ كعلم مستقل وظل هذا هو الوضع إلى أن ولد من جديد على يد العرب.

ولقد اكتسب «علم الجبر» اسمه من الكلمة العربية «الجبر». والتى نحتت فى اللغات الأخرى إلى Algebra ومثيلاتها. وفى اللغة العربية يقول معجم مختار الصحاح: «الجبر» هو أن تغنى الرجل من فقر أو أن تصلح عظمة من كسر». وكان أول من استخدم كلمة الجبر فى هذا العلم هو محمد بن موسى الخوارزمى الذى ولد فى خوارزم وأقام فى بغداد فى القرن التاسع الميلادى فى عصر الخليفة المأمون فقد ألف الخوارزمى فى كتابه الشهير الذى وضع له عنوان «الجبر والمقابلة» ليوضح فيه طرق حل المعادلات، فكان بذلك أول من اعتبر «الجبر» علما مستقلا عن الحساب. ويشرح بهاء الدين الآملى معنى الجبر والمقابلة – وهى الطريقة التى ابتدعها الخوارزمى فى حل المعادلات – بقوله «أن الطرف ذا الاستثناء يكمل ويزاد على الآخر وهو الجبر. والأجناس المتجانسة المتساوية فى الطرفين تسقط منها وهو «المقابلة». وهذا يعنى عند حل معادلة مثل:

٣س + ٢أ = س^{٢} + ٣س – أ

فإن **الجبر** هو الخطوة التى نضيف فيها أ إلى كل من طرفى المعادلة فتصبح ٣س + ٢أ + أ = س^{٢} + ٣س (الجبر) والمقابلة هى الخطوة التى تجمع فيها الحدود المتشابهة ونحذف الحدود المتساوية فى الطرفين أى:

نجمع ٢أ + أ لتصبح ٣أ، نحذف ٣س من طرفى المعادلة فتصبح ٣أ = س^{٢} (المقابلة)

ويفسر أبو محمد عبد الله بن حجاج الشهير بابن الياسمين (القرن

الثانى عشر الميلادى) معنى الجبر والمقابلة فى صياغة شعرية كالآتى:

وكل ما استثنيت فى المسائل سيره إيجابا مع المعادل
ويعد ما يجبر فليقابل .. بطرح ما نظيره يماثل

ويصف ابن الياسمين مكونات علم الجبر فى عصره بقوله:

على ثلاثة يدور الجبر المال والأعداد ثم الجذر
فالمال كل عدد مربع وجذره واحد تلك الأضلع
والعدد المطلق ما لم ينسب للمال أو للجذر فافهم تصب

ومن الواضح أن ابن الياسمين كان يصف الجبر المرتبط بحل المعادلات من الدرجة الثانية، فالمال كان يقصد به ما نعنيه الآن بالرمز $س^٢$، والجذر هو ما نرمز له بالرمز س، والعدد هو الحد المطلق.

ومن الناحية التاريخية فإن حل المعادلات كان يتم بطرق حسابية أو هندسية عند قدماء المصريين والبابليين والاغريق والهنود والصينيين. وكانت المسائل والحلول فى معظمها لفظية كلامية تعتمد على الحساب العقلى أو الصورة الهندسية، ثم جاء العرب فوصفوا بعض القواعد الجبرية كما استخدموا الصور الهندسية واستخدموا الكلمات المختصرة التى يمكن اعتبارها نصف رمزية حيث كان يرمز للمال مثلا بالرمز م، وللجذر بالرمز ش. ولكن استخدام الرموز استخداما عاما والتعبير عن المعادلات بصور رمزية مجردة مثل:

$ا س^٢ + ب س + حـ = صفر$ لم يكتمل إلا فى القرن السابع عشر الميلادى على يدى رياضيين مثل فيتا وهاريوت وديكارت ومعاصرى نيوتن، وهذا هو القرن الذى يعتبره بعض المؤرخين الغربيين بداية الجبر كعلم رمزى يعالج المعادلات بدرجاتها المختلفة كما يعالج قضايا أخرى مثل المقادير الجبرية والمتواليات والدوال والأسس

الاسلام مصر للطباعة

واللوغاريتمات والمحددات وجبر الأعداد المختلفة وجبر المجموعات وجبر المنطق والمصفوفات وما إلى ذلك من موضوعات فى ما يسمى بالجبر الحديث مثل الزمر والحلقات والحقول.

ويقسم المؤرخ نيسيلمان (Nesselman.) تاريخ الجبر إلى ثلاث مراحل:

الأولى: هى مرحلة الصور الكلامية والتى كانت تكتب فيها المسائل الجبرية وحلولها بكلمات وألفاظ.

الثانية: وهى مرحلة الصور المختصرة أو المختزلة وهى التى كانت الحلول تكتب فيها بكلمات مختزلة.

الثالثة: هى المرحلة الرمزية وهى المرحلة التى استخدمت فيها الرموز استخداما كاملا.

ويقول المؤرخ سميث (Smith) أنه لا توجد خطوط واضحة أو تواريخ محددة تفصل بين تلك المراحل إذ أنها كانت تتداخل فى بعض الأحيان. ومن المهم هنا القول بأن رياضى العصور القديمة وإلى حد ما الوسيطة كانت أعمالهم الرياضية تشمل أعمالا متعددة ومتداخلة بما يمكن أن نسميه الآن حسابا وجبرا وهندسة، وربما مس بعضها حساب المثلثات وبداية التفاضل والتكامل.

وسوف نعرض فيما يلى لقطات من بعض الأعمال «الجبرية» فى الحضارات المتعاقبة.

الجبر عند المصريين القدماء:

بنى هرم الجيزة الأكبر قرابة عام ٢٩٠٠ قل الميلاد فوق مساحة تبلغ ١٣ فدانا ويشتمل على أكثر من ٢ مليون قطعة حجرية يزن كل منها فى المتوسط ٢,٥ طن. وأسقف بعض الغرف داخل الهرم مصنوعة من أحجار الجرانيت، (يقدر وزن القطعة منها بحوالى ٥٤

طنا). ويقال أن القاعدة المربعة للهرم تحوى خطأ نسبيا يقل عن ١/١٤٠٠٠، وأن الخطأ النسبى فى الزوايا القائمة عند الأركان لا يزيد عن ١/٢٧٠٠٠. وإن عملا ضخما بهذا الاتقان لابد وأن يحمل بين طياته مهارات رياضية فائقة كان قدماء المصريين يمتلكونها. وهناك آثار أخرى مثل المسلات والمعابد تحمل نفس المعنى. وإلى جانب تلك الشواهد على القدرة الرياضية ظهرت مخطوطات هامة مثل بردية موسكو والتى يعود تاريخها إلى قرابة عام ١٨٥٠ قبل الميلاد، وبردية رايند ـ أو كتاب أحمس ـ والتى يعود تاريخها إلى قرابة عام ١٦٥٠ قبل الميلاد وبعض البرديات الأخرى.

ولكن برديتى موسكو ورايند هما المصدران الرئيسيان للمعلومات عن رياضيات قدماء المصريين. وتتضمن البرديتان ١١٠ مسألة (٢٥، ٨٥).

وتعتبر بردية رايند التى كتبها الرياضى المصرى القديم أحمس والتى يطلق عليها «كتاب أحمس» أو «قرطاس أحمس» أول وثيقة رياضية مكتوبة تتضمن معالجات منظمة فى أبواب اشتملت على العد وكتابة الأرقام، قواعد العمليات الحسابية الأربعة، الكسور، المربع والجذر التربيعى وحل معادلات من الدرجة الأولى والثانية وبعض المتواليات، ومسائل هندسية. وقد تضمنت الأعمال الرياضية بعض الرموز، وكانت السمة الغالبة على طرق حل المعادلات عند قدماء المصريين هى استخدام تقدير أولى للمجهول ثم تصحيح القيمة الافتراضية بما يتفق مع معطيات المسألة. وقد كانت المسائل كلها لفظية وذات طبيعة عملية «تطبيقية».

وكان أحمس يسمى المجهول «كومة» وتنطق بصوت يماثل آها (Aha). والمثال التالى وحله وردا فى كتاب أحمس:

كومة إذا أضيف إليها سبعها أصبحت ١٩.

وهذه المسألة تؤول بلغتنا الرياضية المعاصرة إلى حل للمعادلة

$$\text{س} + \frac{١}{٧}\text{س} = ١٩$$

وقد سار أحمس فى حل هذه المسألة كما يلى:

لتكن هذه الكومة ٧

١	يعطى	٧
$\frac{١}{٧}$	يعطى	١
$١\frac{١}{٧}$	يعطى	٨ (بالجمع معا)

كم ٨ فى ١٩؟

وهنا بحث أحمس عن عدد المرات التى يضاعف بهـا العـدد ٧ حتى يحصل على العدد ١٩ وسار كالآتى:

١	يعطى	٨	
٢	تعطى	١٦	تضعيف العدد ٨
$\frac{١}{٢}$	يعطى	٤	تنصيف العدد ٨
$\frac{١}{٤}$	يعطى	٢	
$\frac{١}{٨}$	يعطى	١	
٢، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$	تعطى	١٩	

الكومة تصحيح ٢، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$ مرات من العدد ٧

١	يعطى	٢، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$	(أى $٢\frac{٣}{٨}$)
٢	تعطى	٤، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$.	تضعيف
٤	تعطى	٨، ١، $\frac{١}{٢}$	تضعيف .
٧	تعطى	١٦، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٨}$	وهذه هى النتيجة

وبذك تكون الكومة المطلوبة تساوى ١٦، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٨}$، أى ($١٦\frac{٥}{٨}$)

ونلاحظ أن افتقار قدماء المصريين إلى رمـوز سـهلة لـلأعداد والمتغيرات هو الذى جعل الحل طويلا ومعقدا وخاصة إذا ما قـارنا بطريقة حل المعادلة

$$س + \frac{١}{٧} س = ١٩.$$

المعروف حاليا لدى أى طالب بالصف الأول الاعدادى حيث يحلها كالآتى:

$$\frac{٨}{٧} س = ١٩ \text{ ومنها } س = \frac{١٩ \times ٧}{٨} = ١٦\frac{٥}{٨}$$

ولكن عليك أن تقدر أن حل أحمس كان منذ حوالى ٣٦٥٠ سنة.

ومن المسائل الطريفة التى وجدت فى بردية رايند المسألة رقم ٧٩ والتى تقول ما يمكن أن يكون معناه كالآتى:

عزبة بها ٧ منازل وفى كل منزل ٧ قطط وكل قطة أكلت ٧ فئـران وكل فأر أكل ٧ سنابل من القمح وكل سنبلة كانت تحمل ٧ وزنات من الحبوب. كم كان مجموع كل ما فى العزبة من منازل وقطط وفئـران وسنابل ووزنات الحبوب. وقد وجدت بيانات هذه المسألة كالآتى:

منازل	٧
قطط	٤٩
فئران	٣٤٣
سنابل قمح	٢٤٠١
وزنات الحبوب	١٦٨٠٧
	١٩٦٠٧

وقد ظهرت مسألة تؤول فى حلها إلى معادلات من الدرجة الثـانية كالآتى:

قسم ١٠٠ وحدة مربعة إلى مربعين بحيث أن طول ضـلع أحـد هذين المربعين يساوى $\frac{٣}{٤}$ طول ضلع الآخر.

وكان الحل كالآتى :

ليكن طول المربع ١ والآخر $\frac{٣}{٤}$

١ $= \frac{٣}{٤}$

بالتربيع ١ $= \frac{٩}{١٦}$

بالجمع ١ ، $\frac{٩}{١٦}$ $= \frac{٢٥}{١٦}$

بأخذ الجذر التربيعى تحصل على $\frac{٥}{٤}$

الجذر التربيعى للعدد الأصلى هو ١٠

كم $\frac{٥}{٤}$ فى العدد ١٠

ثم يقسم ١٠ على $\frac{٥}{٤}$ فتحصل على ٨

وبذلك تكون :

طول ضلع المربع الأول ٨

طول ضلع المربع الثانى $\frac{٣}{٤}$ × ٨ = ٦

أى أن المربعين المطلوبين يكونان ٦٤، ٣٦

وجدير بالذكر أن بعض المؤرخين يرون أن بردية أحمس تتضمن إدراكا لقانون الابدال فى الأعداد حيث كان أحمس يميز بين حاصل ضرب مثل ا ب وحاصل الضرب ب ا، كما أنها تضمنت استخدام قانون التوزيع حيث كان أحمس يضاعف عددا مثل ٢ ، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$ بمضاعفة كل من ٢ ، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$.

ومما يدعو إلى الاعجاب الشديد أن بردية موسكو احتوت على مثال عددى يدل حله الموجود فى البردية على دراية الرياضى المصرى قبل ٤٠٠٠ عام بقانون حجم الهرم الناقص ذى القاعدتين المربعتين والذى نصه الحالى كالتالى :

$$ح = \frac{١}{٣} ع (أ^{٢} + أب + ب^{٢})$$

حيث ع ارتفاع الهرم، أ طول ضلع إحدى القاعدتين المربعتين، ب طول ضلع القاعدة الأخرى.

وقد كانت المسألة كما يلى:

«إذا أخبرت أن هرما ناقصا ارتفاعه الرأسى ٦ وضلعه ٤ فى القاعدة، ٢ فى القمة. فإن عليك أن توجد مربع هذه الأربعة فيكون الناتج ١٦ وعليك أن تضاعف ٤ فينتج ٨. وعليك أن توجد مربع ٢ فيكون الناتج ٤. اجمع ما حصلت عليه ١٦، ٨، ٤ فينتج ٢٨. خذ $\frac{١}{٣}$ الارتفاع ٦ ينتج ٢. ضاعف الـ٢٨ فينتج ٥٦. انظر أنها ٥٦ سوف تجدها صحيحة».

وبتطبيق القانون (١) نجد فعلا أن حجم الهرم المعطى:

$$ح = \frac{١}{٣} \times ٦ \left[(٤)^{٢} + (٤)(٢) + (٢)^{٢} \right]$$
$$= ٢ (١٦ + ٨ + ٤)$$
$$= ٥٦$$

ومن بين المسائل التى وردت فى بردية أحمس المسألة التالية التى تنم عن معرفة بالمتواليات:

«اقسم ١٠٠ رغيف على خمسة رجال بحيث أن ما يحصلون عليه يكون متوالية عددية وأن $\frac{١}{٧}$ مجموع أكبر ثلاثة منهم يساوى مجموع أصغر اثنين».

كما اعتبر أحمس أن مساحة الدائرة تساوى مربع $\frac{٨}{٩}$ قطرها وهذا يعنى أن المصريين كانوا يحسبون القيمة التقريبية للعدد ط على أنها $\frac{٢٥٦}{٨١}$ أى ٣,١٦ تقريبا.

ويجدر بالذكر هنا أن قدماء المصريين كانوا يعرفون حالات خاصة من نظرية فيثاغورس حيث كانوا يستخدمون مثلثا (مصنوعا من الأحبال) أطوال أضلاعه ٣، ٤، ٥ للحصول على زاوية قائمة. وقد قيل أن فيثاغورس نفسه زار مصر ودرس فى بعض معاهدها فى القرن السادس قبل الميلاد.

الجبر عند البابليين:

اكتشفت فى منتصف القرن التاسع عشر الكثير من الآثار التى تدل على تقدم البابليين فى الرياضيات وذلك من خلال وثائق ولوحات تعود إلى فترات تمتد إلى حوالى عام ٢٠٠٠ قبل الميلاد وإلى فترات تاريخية من عصر الملك حمورابى وحتى عام ١٦٠٠ قبل الميلاد، وفترة إمبراطورية بابل الجديدة فى عهد الملك نبوخذ نصر وتعتبر الكشوف عن رياضيات البابليين حديثة نسبية بالنسبة لما تم بالنسبة للكشوفات الخاصة برياضيات قدماء المصريين.

وتظهر اللوحات التى ترجع إلى حوالى ٢٠٠٠ قبل الميلاد أن الأعمال الحسابية عند البابليين كانت تصل إلى مرحلة جبرية ناضجة وإن كانت بالصورة اللفظية والكلامية. فقد ظهرت فى لوحاتهم المصنوعة من الصلصال العديد من الأمثلة ذات الطبيعة الجبرية:

(١) أمثلة تدل على قدرة حسابية جيدة فى إيجاد الجذور التربيعية فقد وجد عندهم أن:

$$\sqrt{٢} = \frac{١٧}{١٢}،\ \frac{١}{٢٤}، = \frac{١٧}{٢٤}،$$

$$\sqrt{٢} = ١ + \frac{٢٤}{٦٠} + \frac{٥١}{(٦٠)^{٢}} + \frac{١٠}{(٦٠)^{٣}}$$ (لاحظ النظام الستينى)

$$= ١,٤١٤٢١٣$$

(٢) جداول لحساب الأرباح المركبة:

فقد وجدت جداول لقوى الأعداد من ١ إلى ١٠ يمكن بواسطتها حل معادلات من صورة $ا^{ن} = ب$

كما وجدت لوحة (تعود إلى عام ١٧٠٠ قبل الميلاد) تعطى المسألة التالية:

«كم من الزمن تحتاج إليه كمية من النقود لكى تتضاعف قيمتها إذا كانت تربح ربحا مركبا قدره ٢٠٪ سنويا؟».

(٣) أمثلة تدل على الحلول الهندسية للمسائل الجبرية أو ما يمكن تسميته بالهندسة الجبرية ومثال ذلك المثال التالى الذى يعود إلى عام ١٨٠٠ قبل الميلاد «مساحة مقدارها ١٠٠٠ وحدة تتكون من مجموع مربعين. ضلع أحد المربعين ١٠ أقل من $\frac{٢}{٣}$ ضلع المربع الآخر. ما طول كل من ضلعى المربعين؟».

(٤) وجد أن اللوحة المشهورة باللوحة رقم ٣٢٢ تشتمل على ثلاثيات من الأعداد التى تكون مثلثات قائمة الزوايا والتى عممها الاغريق فى نظرية فيثاغورس بعد هذه اللوحة بحوالى ألف عام. ومن بين الثلاثيات التى ظهرت:

(١٢٠، ١١٩، ١٦٩)، (٧٢، ٦٥، ٩٧)، (٦٠، ٤٥، ٧٥)، (٢٧٠٠، ١٧٧١، ٣٢٢٩).

لاحظ أن من صفات أى من هذه الثلاثيات أن مربع العدد الأكبر يساوى مجموع مربعى العددين الآخرين.

(٥) حل المعادلات من الدرجة الثانية وتتمثل طريقة الحل فى المثال التالى:

«طول وعرض، إذا ضرب الطول فى العرض كانت المساحة ٢٥٢، وإذا جمع الطول والعرض كان الناتج ٣٢. أوجد الطول والعرض».

جاء الحل فى الخطوات التالية:

المجموع = ٣٢

المساحة = ٢٥٢

نصف المجموع = ١٦

مربع الناتج = $(١٦)^٢$ = ٢٥٦

الفرق بين مربع الناتج والمساحة = ٤

الجذر التربيعى للفرق = ٢

الاسلام مصر للطباعة

أضف نصف المجموع ينتج الطول

الطول = ١٦ + ٢ = ١٨

اطرح نصف المجموع ينتج العرض

العرض = ١٦ - ٢ = ١٤

ومن الواضح أن البابليين كانوا على دراية بالمتطابقة «الجبرية» التالية:

$$\left(\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right)^{٢} - \text{س ص}$$

وذلك لأن خطواتهم كانت تهدف للحصول على نصف الفرق بين الطول والعرض وهو $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$ ثم حل ذلك مع نصف مجموع الطول والعرض $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ بالجمع والطرح.

أى أنه يمكننا تفسير الحل السابق بالطريقة المعاصرة التالية:

نفرض أن الطول س والعرض ص

$$\text{س} + \text{ص} = ٣٢$$

$$\text{س ص} = ٢٥٢$$

$$\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢} = ١٦ \qquad (١)$$

حيث أن

$$\left(\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right)^{٢} - \text{س ص}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}\right)^{٢} = (١٦)^{٢} - ٢٥٢$$

$$= ٢٥٦ - ٢٥٢$$

$$= ٤$$

$$\therefore \frac{\text{س} - \text{ص}}{٢} = ٢ \qquad (٢)$$

$$\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٢} = ٢٦ \qquad \text{من } (١)$$

$$\frac{\text{س}}{٢} - \frac{\text{ص}}{٢} = ٢ \qquad \text{من } (٢)$$

بالجمع

$س = ١٨$

وبالطرح

$ص = ١٤$

إذن الطول ١٨ والعرض ١٤.

(٦) وجدت لوحات تتضمن قيم $ن^٣ + ن^٢$ للأعداد من ن = ١ إلى ن = ٣٠. وقد استخدمت جداول هذه القيم في حل بعض أنواع المعادلات التكعيبية (من الدرجة الثالثة) كما في المثال التالي الذي نورده برموزنا:

حل المعادلة $٢ س^٣ + ٣ س^٢ = ٥٤٠$

من المعتقد أن البابليين ساروا بالطريقة التالية للاستفادة من الجداول التي أشرنا إليها:

$٢ س^٣ + ٣ س^٢ = ٥٤٠$ (١) المعطيات

بالضرب في ٤

$٨ س^٣ + ١٢ س^٢ = ٢١٦٠$

ضع $ص = ٢ س$

$ص^٣ + ٣ ص^٢ = ٢١٦٠$

ضع $ص = ٣ ع$

$٢٧ ع^٣ + ٢٧ ع^٢ = ٢١٦٠$

بالقسمة على ٢٧

$ع^٣ + ع^٢ = ٨٠$

وبالبحث في جداول «$ن^٣ + ن^٢$» تحت العدد ٨٠

نجد أن $ع = ٤$

لأن $(٤)^٣ + (٤)^٢ = ٦٤ + ١٦ = ٨٠$

$ص = ٣ ع$

∴ ص = ٣ × ٤ = ١٢

ولكن ص = ٢س

∴ س = ٦

∴ حل المعادلة (١) هو س = ٦

(٧) يعتقد بعض المؤرخين أن البابليين عرفوا العلاقة التى تربط بين مجموع مكعبات الأعداد ومربع مجموعها أى العلاقة التالية :

$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ٤^٣ + ... + ن^٣ = (١ + ٢ + ٣ + ...ن)^٢$

فمثلا :

$١^٣ + ٢^٣ = ٩$

$(١ + ٢)^٢ = (٣)^٢ = ٩$

كذلك

$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ = ١ + ٨ + ٢٧ = ٣٦$

$(١ + ٢ + ٣)^٢ = (٦)^٢ = ٣٦$

.... وهكذا

الجبر عند الاغريق :

اتجهت الرياضيات بصفة عامة عند الاغريق اتجاها نظريا فبعد أن كانت الحضارات السابقة تهتم بالرياضيات العملية التطبيقية والمبنية على المحاولة والخطأ وعلى التجريب العددى فى الحالات الخاصة، بدأ الرياضيون الاغريق يضعون تعميمات ويبرهنون عليها منطقيا فقد كانوا مغرمين بالفلسفة والمنطق. ومن ثم يمكن القول بأن البراهين المنطقية بدأت عند الاغريق، فالمؤرخون يضعون النصف الأول من القرن السادس قبل الميلاد لمولد الهندسة النظرية على يدى طاليس أحد الحكماء السبعة القدامى. ولكن الجبر لم يتقدم كثيرا على يدى الاغريق نظرا لاهتمام الاغريق بالهندسة ولعدم وجود الرموز وقصر

النظام العدى السائد، لذلك ليس غريبا فى أن يكون الجبر عند الاغريق هو جبرى هندسى فقد صاغ الرياضيون الاغريق الكثير من المتطابقات الجبرية بلغة الهندسة فالعدد المربع عندهم مساحة والجذر التربيعى طول ضلع مربع.

وكما ذكرنا سابقا فإن الاغريق اهتموا بدراسة طبيعة الأعداد الطبيعية والعلاقات بينها كما اكتشفوا الأعداد غير النسبية (الصماء). وبالاضافة إلى ذلك فإنهم حلوا معادلات من الدرجة الأولى والثانية والثالثة كما حلوا معادلات فى متغيرين من نوع المعادلات غير المحددة ــ والتى أسماها العرب فيما بعد بالمعادلات السيالة ــ مثل $س^2 + ص^2 = ٢٥$، كما حلوا معادلات آنية مثل س + ص = أ، س ص = ب والتى تؤول فى حلها إلى معادلات من الدرجة الثانية.

ونعرض فيما يلى أمثلة لأنواع الأنشطة التى تدخل حاليا تحت عنوان الجبر عند الاغريق:

(١) ثلاثيات فيثاغورس:

أوجد الاغريق قواعد لايجاد ثلاثيات من الأعداد بحيث تكون أطوالا لمثلثات قائمة الزاوية. أى أنهم أوجدوا بعض القواعد للحصول على أعداد ا، ب، حـ بحيث $ا^2 + ب^2 = حـ^2$

فمثلا:

ليكن ا = م حيث م أى عدد فردى

فإن $ب = \frac{م^2 - ١}{٢}$، $جـ = \frac{م^2 + ١}{٢}$

وذلك لأن

$$م^2 + \left(\frac{م^2 - ١}{٢}\right)^2 = \left(\frac{م^2 + ١}{٢}\right)^2$$

الاسلام مصر للطباعة

فإذا أخذنا $ا = ٣$

، $ب = \frac{(٣)^٢ - ١}{٢} = \frac{٩ - ١}{٢} = ٤$

، $حـ = \frac{(٣)^٢ + ١}{٢} = \frac{٩ + ١}{٢} = ٥$

ومن القواعد الأخرى التى وضعها الفيثاغوريون:

ليكن $ا = ٢م$

فتكون $ب = م^٢ - ١$ ، $حـ = م^٢ + ١$

وفى هذه الحالة م تكون فردية أو زوجية

فمثلا:

خذ $م = ٤$

$ا = ٢م = ٨$

$ب = م^٢ - ١ = ١٦ - ١ = ١٥$

$حـ = م^٢ + ١ = ١٦ + ١ = ١٧$

وإذن ٨، ١٥، ١٧ تكون أضلاع مثلث قائم الزاوية

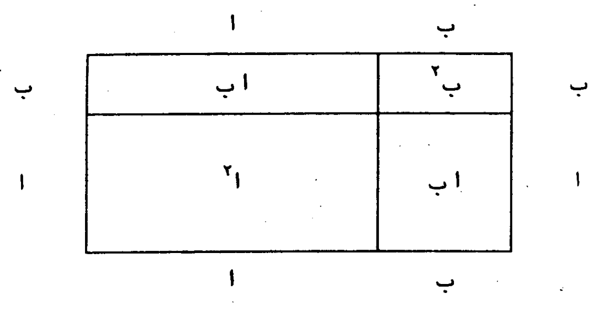
لأن $(٨)^٢ + (١٥)^٢ = ٦٤ + ٢٢٥ = ٢٨٩ = (١٧)^٢$

(٢) **المتطابقات الجبرية:**

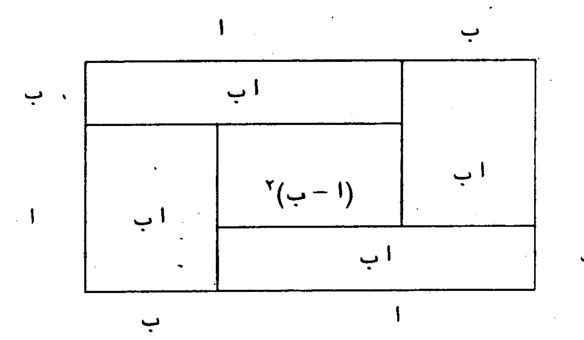
فمثلا: $(ا + ب)^٢ = ا^٢ + ٢اب + ب^٢$

كانت تعطى بالصورة الهندسية التالية:

خذ مربعا طول ضلعه ا + ب ثم لاحظ تقسيمة إلى أربع مساحات هى المربع الذى طول ضلعه ا (مساحة $ا^٢$) والمربع الذى طول ضلع ب (مساحة $ب^٢$) ومستطيلان بعدا كل منهما ا، ب (مساحتهما ٢اب).



شكل (٢٠) : $(ا + ب)^{٢} = ا^{٢} + ٢ اب + ب^{٢}$



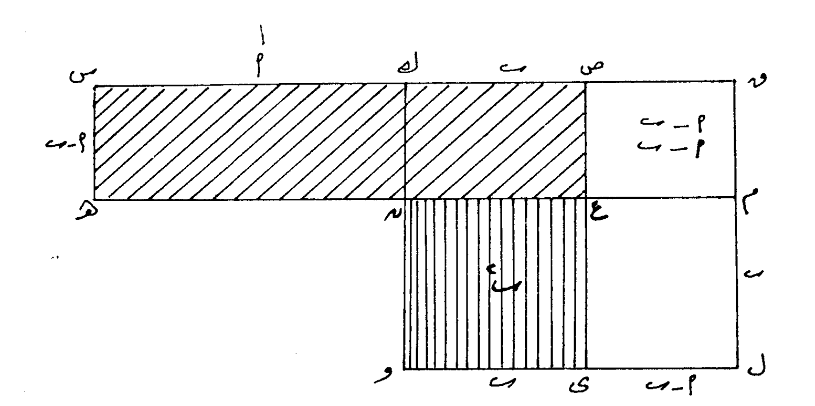
شكل (٢١) : $(ا + ب)^{٢} = (ا - ب)^{٢} - ٤اب$

وبالنسبة للمتطابقة :

$$(ا + ب) \; (ا - ب) = ا^{٢} - ب^{٢}$$

فقد كانت الصورة الهندسية كالآتى :

خذ س ق = ٢ ا، ك ص = ب وإنشىء المستطيل س ق م هـ ثـم إنشىء المربع ك ق ل و الذى طول ضلعه ا



شكل (٢٢) : (ا + ب) (ا − ب) = ا^{2} − ب^{2}

(ا + ب) (ا − ب) = المستطيل س ص ع هـ

ب^{2} = المربع ن ع ى و

ا^{2} = المربع ك ق ل و

من الواضح فى الشكل أن :

(ا + ب) (ا − ب) + ب^{2}

= الشكل س ص ع هـ + الشكل ن ع ى و

= (س ك ن هـ + ك ن ع ص) + ن ع ى و

= س ك ن هـ + (ن ك ع ص + ن ع ى و)

= ص ق ل ى + ك ص ى و ك ق ل و

= ا^{2}

اذن

(ا + ب) (ا − ب) = ا^{2} − ب^{2}

الاسلام مصر للطباعة

(٣) حل معادلات الدرجة الثانية :

حل الاغريق معادلات الدرجة الثانية هندسيا.

فمثلا : لحل المعادلة س^{٢} − ١٣س + ٣٦ = صفر

فإن هذه المعادلة تكافئ أوجد عددين مجموعهما ١٣ وحاصل ضربهما ٣٦ وهذه تكافىء.

قسم مستقيما طوله ١٣ إلى جزئين بحيث أن مساحة المستطيل الناشىء بهذين الجزأين تكون مساحته ٣٦.

ولعمل هذا كان الرياضى الاغريقى يقوم بالعملية الهندسية التالية :

ارسم مستقيما ا ب طوله ١٣

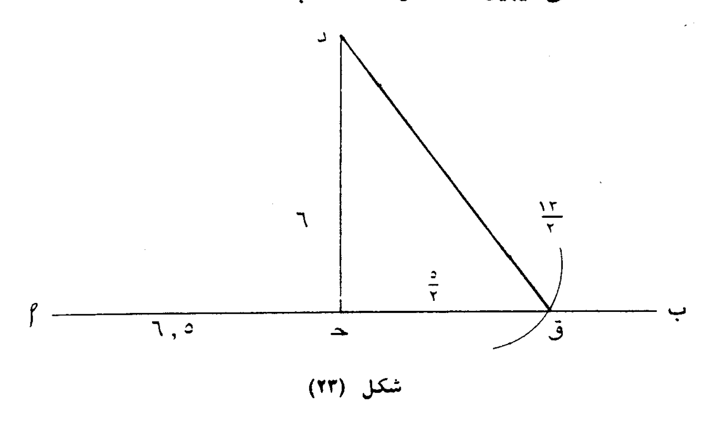
نصف ا ب فى جـ

أقم عمودا جـ د من جـ على ا ب بحيث يكون طول جـ د = ٦

إركز فى نقطة د وارسم دائرة نصف قطرها يساوى $\frac{١٣}{٢}$ ويقطع القوس المرسوم المستقيم ا ب فى نقطة ق

طول ا ق هو أحد العددين، وطول ق ب هو العدد الآخر.

والشكل التالى يبين الخطوات السابقة :



شكل (٢٣)

من الشكل يتضح أن:

ق = $\frac{د}{٢}$ = ٢,٥

أ ق = ٦,٥ + ٢,٥ = ٩

ق ب = ٦,٥ − ٢,٥ = ٤

إذن حل المعادلة هى س = ٤ أو س = ٩

ومن الملاحظ أن هــذه الطريقة هى صـياغة هندسـية للـطريقة البابلية السابق ذكرها فى حل معادلتين آنيتين مثل:

س + ص = أ ، س ص = ب

(٤) **المعادلات السيالة**:

المقصود بذلك هى المعادلات التى تشتمل على أكثر من متغيـر والتى يكون لها عدد غير محدود من الحلول مثــل س + ص = ١٠ حيث نجد عددا لا نهائيا مــن الأزواج المــرتبة (س، ص) تحقــق المعادلة مثل (٤،٦)، (٦،٤)، (−١،١١)...

ومن أوائل المعادلات السيالة والتى كان يطلق عليها أيام الاغريق المعادلات غير المحددة المعادلة التالية $س^٢ + ص^٢ = ع^٢$ وهى التى تعطينا ثلاثيات فيثاغورس مثل (٥،٤،٣)، (١٣،١٢،٥)،...

ويعتبر ديوفانتس (حوالى ٢٧٥ ميلادية) من أبــرز دارسى هــذا النوع من المعادلات حتى أنها تسمى أحيانا بالمعادلات الـديوفانتية. ومما ينسب إلى ديوفانتس أيضا أنه يعتبر أول من حــاول دراســة الجبر دراسة منفصلة عن الحساب كما أنه اســتخدم الاختــزال فى التعبير عن المعادلات حيث استخدم حروفا من كلمات اغريقية للدلالة على المجهول وعلى ما نسميه الآن $س^٣$، $س^٢$ كما اســتخدم رمــزا للطرح. ولا يعرف الكثير عن ديوفانتس.. ولــكن إحــدى الأحــاجى الرياضية تحدد العمر الذى مات عنده ديوفانتس وتقــول الأحجيــة

ما معناه:

«هنا يرقد ديوفانتس
حباه الله طفولة تساوى $\frac{1}{6}$ عمره
وبلغ مرحلة الشباب بعد ذلك بـ $\frac{1}{12}$ من عمره
وتزوج بعد ذلك بزمن يبلغ سبع عمره
وأنجب ابنا بعد ذلك بخمس سنوات
وعاش الابن على الأرض نصف ما عاشه أبوه
وحزن الأب حزنا شديدا على موت ابنه
فقضى نحبه بعد وفاة ابنه بأربع سنوات
إن العمر ليس مكتوبا على القبر
ولكن يمكنك أن تحسبه من علم الجبر».

وبحل هذا اللغز جبريا نجد أن ديوفانتس مات وعمره ٨٤ عاما.

مدرسة الاسكندرية:

أنشأ الاسكندر الأكبر مدينة الاسكندرية عام ٣٣٢ قبل الميلاد. ومنذ وجودها أصبحت الاسكندرية من أعظم مدن العالم وأهمها. وبعد وفاة الاسكندر الأكبر فى عام ٣٢٣ قبل الميلاد أصبحت مصر تحت حكم البطالمة، واختار بطليموس الاسكندرية عاصمة لملكه فى عام ٣٠٦ قبل الميلاد وأنشأ فيها مدرسة الاسكندرية التى تعتبر أشهر جامعة علمية فى التاريخ والتى كان لها نفس الصفات التى تتسم بها كبرى الجامعات فى عالمنا المعاصر، حيث كانت تضم قاعات للمحاضرات ومعامل ومتاحف ومكتبات ومدن سكنية وحدائق خاصة بها. وافتتحت الجامعة عام ٣٠٠ قبل الميلاد (وظلت قرابة ألف عام منارة للعلم والحضارة. وفى مدرسة الاسكندرية هذه حاضر أو تعلم العديد من علماء الرياضيات الذين ينتمون إلى الحضارة الاغريقية.

الاسلام مصر للطباعة

وفيما يلى نقدم بعض الرياضيين الذين ارتبطوا بمدرسة الاسكندرية.

أقليدس:

كان اقليدس أستاذا للرياضيات بجامعة الاسكندرية ويبدو أنه كان مؤسس قسم الرياضيات بها. وكان معروفا عنه التواضع العلمى، ومن أقواله الشهيرة أنه «لا يوجد طريق ملكى للهندسة» وذلك عندما سأله الملك بطليموس عن طريق مختصر يتعلم به الهندسة. ومن أشهر أعمال اقليدس كتاب «الأصول» الذى نظم فيه الهندسة على أسس منطقية وبناها على مجموعة من الأفكار العامة وخمس مسلمات أساسية هى أساس ما يسمى بالهندسة الاقليدية. والتى تدرس حتى الآن فى مدارسنا.

وإلى جانب الهندسة المستوية والهندسة المجسمة تضمن كتاب «الأصول» معالجات جبرية عن النسبة والتناسب والأعداد النسبية وغير النسبية وحل معادلات الدرجة الثانية هندسيا وبعض نظريات الأعداد.

أرشميدس:

ولد أرشميدس حوالى عام ٢٨٧ قبل الميلاد ويعتقد أنه قضى وقتا من حياته فى جامعة الاسكندرية. ويعتبر أرشميدس من أعظم الرياضيين الذين أنجبتهم البشرية، وتروى عنه قصص كثيرة تدل على نبوغه وعبقريته مثل قصة مشاركته فى الدفاع عن جزيرة سيراكيوز ضد حصار الرومان، وقصة اكتشاف الذهب الخالص من الذهب المغشوش والذى اكتشف من خلالها فكرة الكثافة بينما كان يسبح فى حمامه. ويقال أنه قتل بينما كان مشغولا فى حل إحدى المسائل التى كان يرسمها على سطح الرمال.

الاسلام مصر للطباعة

ولأرشميدس أعمال رياضية كثيرة فى الهندسة والحساب والجبر والمنحنيات اللولبية والنهايات وحساب المثلثات وحل المعادلات السيالة وله حله الهندسى المعروف بلولب أرشميدس الذى حاول من خلاله حل مشكلة تربيع الدائرة.

وإلى أرشميدس يعود الفضل فى تطوير طريقة التقريب المتتالى للمساحات التى بدأت على يد إيدوكسس والتى أصبحت بعد ذلك أساس حساب التكامل الحديث.

أراتوستثينس Eratosthenes

ولد حوالى عام ٢٧٥ قبل الميلاد واشتغل أمينا للمكتبة بجامعة الاسكندرية وكان موهوبا فى العديد من علوم عصره ولكنه لم يتفوق على قرنائه فى أى من تلك العلوم وربما كان هذا هو السبب فى أن أطلق عليه اسم بيتا (Beta) أى الرجل الثانى. وله أعمال فى الهندسة ومحاولة تضعيف المكعب وقياس الأرض، ومن أشهر أعماله طريقته المعروفة باسم الغربال فى إيجاد الأعداد الأولية فى مجموعة متتابعة من الأعداد الطبيعية.

أبولونيوس

كان اقليدس وأرشميدس وأبو لونيوس عمالقة الرياضيات فى القرن الثالث قبل الميلاد، وقد ولد أبولونيوس حوالى عام ٢٦٢ قبل الميلاد. وقد درس فى جامعة الاسكندرية وبقى فيها فترة طويلة ثم غادرها وعمل فى احدى الجامعات فى غرب آسيا الصغرى ولكنه عاد إلى الاسكندرية حيث مات هناك فى حوالى عام ٢٠٠ قبل الميلاد. وقد كان أبولونيوس فلكيا وكتب فى الكثير من الموضوعات الرياضية ولكنه اشتهر فى معالجاته للقطوع المخروطية. وقد كان أبولونيوس هو الذى

الاسلام مصر للطباعة

أطلق المصطلحات المستخدمة حاليا على أنواع القطوع المخروطية وهى « المكافىء »، « الناقص »، « الزائد ».

هيرون (Heron)

عاش هيرون فى فترة غير معروفة بالتحديد ولكنها تقع فى زمن يتراوح بين عام ١٥٠ قبل الميلاد وعام ٢٣٠ بعد الميلاد. وقد اشتغل بالرياضيات والفيزياء حتى أنه كان ينظر إليه على أنه دائرة معارف.

ومن المعتقد أنه كان مصريا وليس اغريقيا – كما هو الحال بالنسبة للرياضيين السابق الاشارة إليهم – وكانت معالجاته تتسم بالعنصر العملى والتطبيقى أكثر من العنصر النظرى، فله أعمال أصيلة فى علوم المهندسين ومساحة الأراضى. ومن أشهر أعمال هيرون الهندسية ما يتعلق بقياس المساحات للأشكال الهندسية وسطوح المجسمات. وينسب إلى هيرون طريقة ايجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعى بطريقة المتوسطات الحسابية المعروفة. فمثلا :

لايجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{٢}$:

٢ = ١ × ٢ ∴ $\sqrt{٢}$ يساوى تقريبا $\frac{١}{٢}$ (١ + ٢) = ١$\frac{١}{٢}$

٢، ÷ ١$\frac{١}{٢}$ = $\frac{٤}{٣}$ ، $\sqrt{٢}$ يساوى تقريبا $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٣}{٢}$) + $\frac{٤}{٣}$ = ١$\frac{٥}{١٢}$، ...

كما اشتغل هيرون بوصف بعض الاجهزة وصناعتها والآلات الميكانيكية مثل اللعب وآلات أطفاء الحريق وأدوات للقياسين والمساحين كما صنع أنواعا مختلفة من المرايا.

ديوفانتس Diophantus

القليل هو المعروف عن حياة ديوفانتس وجنسيته، ويستنتج المؤرخون أنه عاش فى القرن الأول الميلادى. ومن المؤكد أنه عاش

الاسلام مصر للطباعة

معظم حياته فى الاسكندرية. ويعتبر ديوفانتس رياضيا هاما فى تأسيس ونمو علم الجبر. ومن أهم أعماله كتاب «الارثماطيقا» وهو كتاب يقدم معالجة تحليلية لنظرية الأعداد الجبرية، ويتضمن حل معادلات من الدرجة الأولى والثانية وحالات خاصة من معادلات الدرجة الثالثة، كما يتضمن حل معادلات غير معينة (سياله) فى متغيرين أو ثلاثة متغيرات. وقد اعترف ديوفانتس فى حل معادلاته بالأعداد الموجبة النسبية فقط وكان يكتفى بحل واحد (جذر واحد) فى حلول معادلاته.

وقد استخدم ديوفانتس الاختزال فى كتابة معادلاته للتعبير عن المجهول وعن الأسس وعن عملية الطرح والمقلوب وعلاقة التساوى حيث كان يستخدم الأحرف الأولى للكلمات الاغريقية الدالة على تلك المفاهيم . وبذلك نقل الجبر من المرحلة اللفظية إلى مرحلة اللفظية المختزله وكانت هذه المرحلة ممهدة للرمزية الكاملة التى جاءت فى القرن السادس عشر .

ومن بين الرياضيين المشهورين المرتبطين بمدرسة الاسكندرية.

بابوس (Pappus)

الذى عاش فى نهاية القرن الثالث الميلادى والذى قدم شروحا وإضافات لرياضيات من سبقوه مثل التوسع فى نظرية فيثاغورس ومعالجة الأعداد الكبيرة التى اشتغل عليها أبولونبوس وشرح لبعض ما جاء عند اقليدس وكتاب المجسطى لبطليموس، ولولب أرشميدس، وتجميع الكثير من الرياضيات التى كانت معروفة قبله. كما أن لبابوس بعض النظريات والحلول الهندسية التى ابتكرها بنفسه.

وبعد بابوس ظهر الكثيرون من المعلقين والشراح فى الاسكندرية مثل ثيون وابنته الحسناء هيباتيا الاسكندرانية والتى تعتبر أول امرأة رياضية فى التاريخ والتى عاشت فى القرن الخامس الميلادى واشتغلت بالرياضيات والطب والفلسفة ولكنها أغتيلت على يد مجموعة من الغوغاء.

الاسلام مصر للطباعة

الجبر عند الهنود

شأن حضارات الشرق القديمة كان للهند حضارة تمثلت فى نظم للكتابة والعد والقياس وفى شق القنوات للرى وإقامة المبانى للمساكن والمعابد.

وإذا بدأنا بقبائل النبلاء المعروفة باسم الأريان التى عاشت فى الهند منذ حوالى ٤٠٠٠ سنة (عام ٢٠٠٠ قبل الميلاد) فإن هؤلاء الناس كونوا لأنفسهم حضارة فى الألف سنة الأولى تمخضت عن لغة مقروءة ومكتوبة هى لغة السنسكريت.

وقد ظهرت كتابات تعود إلى القرن السادس قبل الميلاد تعطى قواعد هندسية لبناء المعابد البوذية مما يدل على معرفة بأعداد فيثاغورس. وعلى أعمدة تعود إلى عهد الملك أسوكا (٢٧٢ إلى ٢٣٢ قبل الميلاد) توجد عينات لأصول رموز الأرقام العددية المستخدمة فى النظام العدى المعاصر. ومنذ بداية القرن الخامس الميلادى بدأت الرياضيات فى الهند تقوم على خدمة الفلك بعد أن كانت مرتبطة بالعقيدة البوذية فظهرت جداول عن الفلك وجداول خاصة بحساب المثلثات. وهناك شعور لدى بعض المؤرخين بالتأثير المتبادل بين رياضيات الهند ورياضيات البابليين والاغريق والصينيين. وفى الفترة ما بين القرنين الخامس والرابع عشر الميلادى ظهر رياضيون ممتازون فى الهند من بينهم: أرياباتا، براهما جوبتا، ما هافيرا، باسكارا.

ومازال تاريخ الرياضيات عند الهند يحتاج إلى مزيد من البحث.

وقد كان الهنود ماهرين فى حل المسائل الحسابية كما كانت لهم مآثر جيدة فى الجبر. وقد كانوا يحلون مسائل الحساب بطريقة الفرض الخاطئ، كما استخدموا طريقة الحل «بالمعكوس» حيث يبدأ الحل من نهاية المسألة ويسير فى خطوات عكسية حتى البداية. وعلى

الاسلام مصر للطباعة

سبيل المثال نذكر المسألة التالية التى تعود إلى القرن السادس الميلادى والتى أعطاها أرياباتا مخاطبا ابنته:

«خبرينى أيتها العذراء الجميلة ذات العيون البراقة لأنك تفهمين الطريقة الصحيحة للحل بالمعكوس. ما العدد الذى إذا ضرب فى ٣ ثم زيد بمقدار $\frac{٣}{٤}$ حاصل الضرب ثم قسم على ٧ وأنقص بمقدار $\frac{١}{٣}$ خارج القسمة. ثم ضرب فى نفسه وأنقص بمقدار ٥٢ ثم أخذ جذره التربيعى وأضيف إليه ٨ وقسم الناتج على ١٠ كان الناتج ٢».

وبطريقة الحل المعكوس نبدأ بالعدد ٢ ونسير فى خطوات عكسية:

$$[٢ \times ١٠ - ٨]^{٢} + ٥٢ = ١٩٦$$

$$\sqrt{١٩٦} = ١٤$$

$$١٤ \times \frac{٣}{٢} \times ٧ \times \frac{٤}{٧} \times \frac{١}{٣} = ٢٨$$

إذن العدد المطلوب هو ٢٨

وإذا قمنا بحل هذه المسألة بلغتنا المعاصرة يمكن أن نسير كالآتى: نفرض أن العدد س

$$\frac{١}{١٠}\left[\sqrt{\left(٣\text{س} \times \frac{٧}{٤} \times \frac{١}{٧} \times \frac{٢}{٣}\right)^{٢} - ٥٢} + ٨\right] = ٢$$

$$\sqrt{\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)^{٢} - ٥٢} + ٨ = ٢٠$$

$$\sqrt{\frac{١}{٤}\text{س}^{٢} - ٥٢} = ١٢$$

$$\frac{١}{٤}\text{س}^{٢} - ٥٢ = ١٤٤$$

$$\frac{١}{٤}\text{س}^{٢} = ١٩٦$$

$$\text{س}^{٢} = ١٩٦ \times ٤$$

$$\text{س} = ١٤ \times ٢ = ٢٨$$

وقد كتب الهنود جبرهم بلغة مختزلة مثل ديوفانتس. وقد اعترف الهنود بالأعداد السالبة والأعداد غير النسبية وعرفوا أن للمعادلة

الاسلام مصر للطباعة

التربيعية جذرين، واستخدموا إكمال المربع فى حل المعادلات التربيعية. وقد أعطى باسكارا المتطابقتين الجبريتين التاليتين:

$$\sqrt{ا \pm \sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{ا + \sqrt{ا^{٢} - ب}}{٢}} \pm \sqrt{\frac{ا - \sqrt{ا^{٢} - ب}}{٢}}$$

وقد تضمن كتاب اقليدس «الأصول» هاتين المتطابقتين ولكن بصياغة أصعب.

وقد اشتغل الهنود بالمعادلات السيالة واهتموا بكل الحلول الصحيحة الممكنة لحل معادلات مثل ا س + ب ص = حـ حيث ا، ب، حـ أعداد صحيحة. كما اشتغلوا على معادلات مثل:

$$س ص = ا س + ب ص + حـ$$

$$ص^{٢} = أ س + ب$$

الفصل الرابع
الجبر عند العرب
(الحضارة العربية الاسلامية)

الاسلام مصر للطباعة



يعتبر ظهور الاسلام والفتوحات العربية التى تلته وامتدت خلال قرن من الزمان فشملت منقطة تصل من الهند وفارس والعراق إلى شمال أفريقيا وحتى اسبانيا... واحدا من أعظم الأحداث فى تاريخ البشرية. فقد استطاع الاسلام أن يوحد قبائل شبه الجزيرة العربية المنقسمة والمشتتة فى أمة قوية بفضل الوحدة الدينية. وازدهرت الحضارة العربيه الاسلامية بكل تراثها الخصب خصوصا منذ أسس العباسيون خلافتهم فى بغداد، وشجع العباسيون الانفتاح الثقافى والعلمى على تراث الحضارات القديمة للبلدان التى دخلت فى ملكهم مثل فارس والهند ومناطق المشرق العربى، وتوجهت جهود ضخمة لترجمة هذا التراث إلى العربية من اليونانية والسنسكريتية وغيرها من اللغات فى الرياضيات والفلك والحيل (الميكانيكا) والطب والنبات والحيوان... إلخ. وكانت مكتبة الخليفة المأمون والمرصد الذى أنشىء والمدرسة العلمية التى نشأت حولهما فى عصره نموذجا للعمل العلمى الكبير الذى نهضت به الحضارة العربية الاسلامية كتعبير عن احتياجات هذه الحضارة فى تنظيم الانتاج والتجارة والزراعة والسفر ومسح الأراضى بها وحتى فى تنظيم قضايا المواريث ومواقيت الصلاة... إلخ.

وحتى عندما انقسمت أرض الخلافة إلى ممالك مختلفة فى القرنين الرابع والخامس الهجرى بقى العلم العربى مزدهرا ازدهارا ملحوظا وأدى دورا هاما فى حياة هذه الممالك الجديدة، بل واشتد تنافس الملوك والسلاطين الجدد على احتضان العلماء وتشجيعهم ورعايتهم فكثرت المكتبات والمراصد بعد أن كانت قاصرة على بغداد.

وفى هذه الظروف الجديدة بقيت بغداد بمثابة العاصمة الدينية ولكنها فقدت أهميتها كعاصمة سياسية أو اقتصادية أو ثقافية. وبدلا من ذلك انتعشت المدن القديمة مثل الاسكندرية وانطاكية ودمشق ثم القاهرة وقرطبة فى الأندلس... إلخ. وكل هذه المدن كانت على صلة ببعضها البعض وكان تنوع إنتاجها أساسا للتجارة وتحسين الأساليب ولقد كانت هذه المدن بؤرة اتصال بالمعرفة الآسيوية واليونانية القديمة، وكان من نتيجة ذلك أن تجمعت فى المدن العربية مكتبات ضخمة من تراث البشرية العلمى والجهود الأولى لعلماء العصر العباسى الأول، وسلسلة جديدة من الاختراعات غير المعروفة للتكنولوجيا اليونانية القديمة الرومانية. ومن هنا نشأت فى هذه المدن صناعات جديدة كانت أساسا لانجازات علمية أوسع هى التى دفعت الغرب الأوربى دفعا نحو الثورة التكنولوجية فى القرنين السابع عشر والثامن عشر.

فى هذه العصور التى ازدهرت بنتاج الحضارة العربية الاسلامية كانت أوروبا تغط فى نوم عميق فيما سمى بعصور الظلام الأوربية، ولم يعرف الأوربيون طريقهم إلى العلم والتكنولوجيا إلا من خلال ترجماتهم اللاتينية للكتب العربية الأساسية فى الأندلس وصقلية. ولا ينكر أحد اليوم من مؤرخى العلم فى الغرب الدور المركزى الذى لعبته الحضارة العربية الاسلامية فى المحافظة على التراث اليونانى القديم فى العلم والفلسفة ونقله إلى أوروبا. لكن بعضهم يحاول أن يقلل من الاضافات العلمية للحضارة العربية الاسلامية بإدعاء أن العرب كانوا مجرد حفظة للتراث اليونانى فحسب.

والحقيقة أن هذا القول فيه تجن شديد. فالعرب نقلوا بدقة التراث اليونانى ليطبقوه على ظروف ومشاكل مجتمعهم وهو مجتمع مختلف تماما عن المجتمع اليونانى القديم، وكان لابد أن يؤدى هذا ليس إلى حفظ التراث اليونانى فحسب، وإنما إلى اكتشاف نتائج جديدة

الاسلام مصر للطباعة

وتحسين ما أنجزه اليونانيون، بل واستحداث فروع جديدة فى العلم لم يعرفها اليونانيون.

ينطبق هذا بوجه عام على الرياضيات وفروعها المختلفة مثل حساب المثلثات الكروى الذى لم تعرفه الحضارةاليونانية، والاصلاحات التى أدخلها العرب على كتاب بطليموس (المجسطى) فى الفلك، كما أن نشأة الجبر ـ كعلم مستقل عن الحساب ـ كان ثمرة من ثمرات الحضارة العربية الاسلامية وهو الأمر الذى بدأ بكتاب الخوارزمى (الجبر والمقابلة)، وما زال اسم هذا العلم فى الحضارة الأوروبية الحديثة يستمد أصله من كلمة الجبر العربية، بل إن أى عملية حسابية تجرى فى أى فرع من فروع العلم فى أوروبا اليوم تسمى خوارزمية Algorism نسبة إلى الخوارزمى .

ويعترف الأوربيون اليوم أن نصير الدين الطوسى (القرن الثالث عشر الميلادى) درس المسلمة الخامسة فى أصول اقليدس (مسلمة التوازى) وحاول اشتقاقها من المسلمات الأربع التى سبقتها ، وأن دراسة الطوسى هذه هى التى أدت بزخارى إلى بدء عمله فى الهندسة غير الاقليدية من خلال معرفة بكتابات نصير الدين الطوسى فى الهندسة . ولقد ترجمت هذه الكتابات بواسطة العالم الانجليزى جون واليس John Wallis فى القرن السابع عشر الميلادى واستخدمها فى محاضراته بجامعة اكسفورد .

كما لم ينكر الأوربيون أن جابر بن أفلح (القرن الثالث عشر الميلادى) قد اشتهر كعالم كبير فى أشبيليه (الأندلس) وأنه كتب كتابا يعرف باسم (كتاب إصلاح المجسطى) وقد انتقد فيه آراء بطليموس فى الفلك انتقادا شديدا، وقد قيل إن كوبرنيكس وكبلر فيما بعد كانا على علم بهذا الكتاب وأنه أثر تأثيرا شديدا عليهما فى رؤيتهما الجديدة فى الفلك ودوران الأرض.

الاسلام مصر للطباعة

ولقد اكتشف جابر القانون جتا أ = جتا أَ حاب في المثلث الكروى القائم الزاوية في جـ، وعرف هذا القانون تاريخيا عند الأوروبيين باسم قانون جابر Geber Law

كما ينبغى أن نشير فى هذا المقام إلى العالم الكبير أبو الوفا البوزجانى الذى عاش فى بغداد ، وكان أول من استخدم النسبة المثلثية التى تعرف الآن باسم ظل الزاوية واشتهر بحسابه لجداول الجيب والظل للزاوية ١٥° ومضاعفاتها واكتشف كثيرا من قوانين حساب المثلثات الكروى ، وإلى أبى عبد الله البتانى الذى أمضى معظم حياته فى رصد الكواكب والنجوم على نهر الفرات وهو الذى أسس علم حساب المثلثات الحديث ، ومن أشهر أعماله (زيج الصابى) الذى يحتوى على جداول أرصاد فلكية صحح بها كتاب (المجسطى) لبطليموس .

وأحيانا يحاول بعض المؤرخين الأوروبيين التهوين من شأن الانجازات العربية فى الرياضيات والفلك بالقول بأن من نبغ من علماء تلك الفترة إنما هم من أصل فارسى أو بلاد ما وراء النهرين وصحيح أن كثيرين منهم لهم هذه الأصول، لكنهم فى الحقيقة كانوا جميعا نتاج الحضارة العربية الاسلامية، يكتبون ويفكرون ويتواصلون باللغة العربية، وهم جزء أساسى من هذه الثقافة ويستحيل فصلهم عنها. ومع ذلك فابن الهيثم الذى يعتبره الأوربيون أعظم علماء الحضارة العربية الاسلامية لاكتشافاته فى علم البصريات وحلوله العبقرية فى معادلات الدرجة الثالثة والرابعة، من مواليد البصرة وعاش معظم حياته فى مصر ودفن بها وأصوله العربية ليست محل شك من أحد.

إن ما ينساه بعض مؤرخى العلم الأوربيين عندما يحكمون على الانجازات الرياضية للحضارة العربية هو أن هذه الانجازات قد تمت فى مواجهة العقم الذى كان يسود بقية العالم آنذاك. هذا أولا، ومن ناحية أخرى فكل العلماء العظام الذين أنتجتهم الحضارة العربية

الاسلام مصر للطباعة

الاسلامية لم يكونوا متخصصين بالمعنى الضيق الذى نتحدث عنه اليوم. فمعظم هؤلاء كان يبحث فى الهندسة والحساب والجبر والفلك والطب وعلوم الحياة والفلسفة فى آن واحد، وكثيرون منهم كانوا مترجمين فى نفس الوقت. فالكندى (القرن التاسع الميلادى) مثلا كان مشتغلا بالفلسفة ومع ذلك فله كتاب هام فى الهندسة أثر تأثيرا ملحوظا على روجر بيكون وداتيلا، وله كتاب مدون ومنشور فى أوربا اسم (رسالة الكندى فى المد والجزر). والبيرونى (القرن العاشر الميلادى) بحث فى الرياضيات والفلك وله كتب فى الطبيعيات والصيدلة والطب، بل له دراسة جغرافية اجتماعية عن الهند فى كتابه المعروف (تحقيق ما للهند من مقولة مقبولة فى العقل أو مرذوله). وثابت بن قرة (القرن التاسع الميلادى) هو الذى نقح تنقيحا دقيقا ترجمة كتاب (الأصول) لاقليدس التى كان قد قام بها اسحاق بن حنين. ولاشك أننا مدينون له بترجمة أعمال أبولونيوس (القطاعات المخروطية) وأرشميدس وإقليدس. كما أنه صحح ترجمة اسحاق بن حنين لكتاب أرسطو فى النبات كما ندين له بكتاب (الذخيرة) فى الطب. وبالرغم من كل ذلك فإن أبحاثه فى الهندسة هى التى مهدت فى رأى البعض – إلى ظهور علم التفاضل والتكامل.

وسوف نستعرض فيما يلى لمحة عن حياة وإنجازات بعض هؤلاء الرياضيين الكبار:

(١) **ابن الهيثم**:

(٩٦٥ – ١٠٣٩م.) أبو على الحسن بن الهيثم، ولد بالبصرة، وإن كان قضى معظم حياته بالقاهرة ودفن بها.

لم يكن ابن الهيثم عالما طبيعيا ورياضيا كبيرا وفق كافة المعايير فحسب وإنما كان مهندسا كبيرا بمقاييس عصره، فهو أول من أشار

إلى فكرة تخزين مياه النيل عند أسوان للانتفاع بها فى فصول الجفاف.

ولقد سمع الحاكم بأمر الله، الخليفة الفاطمى فى مصر، بأمر ابن الهيثم وعلو مقامه فى العراق فدعاه إلى مصر وخرج لاستقباله خارج أسوار القاهرة وولاه منصبا من مناصب الدولة. وبعد وفاة الحاكم استوطن بن الهيثم غرفة بجوار الجامع الأزهر وانقطع للبحث والتأليف حتى وفاته. ويعتبر كتابه (المناظر) أكبر أعماله العلمية وأجلها شأنا. وكثير من مسائل الهندسة والجبر التى حلها كانت نواتج لدراساته فى علم الضوء.

ويعتبر العالم البريطانى برونفسكى فى كتابه (ارتقاء الانسان) أن ابن الهيثم أعظم الرجال الذين ترجم الأوربيون أعمالهم فى القرون الوسطى وعصر النهضة لأنه أدرك لأول مرة فى تاريخ البشرية أننا نرى الأجسام لأن كل نقطة عليها ترسل شعاعا إلى العين وتعكسه منها لا العكس كما كان يظن اليونانيون، وأن هذه الفكرة هى التى أدت إلى فكرة المنظور التى كانت ذات أثر كبير على الفن الأوربى. كما يرى المؤرخ الايطالى ألدو مييلى فى كتابه (العلم عند العرب) أنه واحد من أربعة يمثلون أعظم المفكرين والعلماء الاسلاميين وهم الرازى والبيرونى وابن سينا وابن الهيثم. أما العالم البريطانى برنال فى كتابه (العلم فى التاريخ) فإنه يؤكد إلى جانب كل ذلك على أهمية دراسة ابن الهيثم عن تركيب العين.

أما المشكلة الرياضية التى عرفت تاريخيا باسم (مسألة ابن الهيثم) فتتلخص كما يلى:

لدينا دائرة مركزها و ونقطتان ا، ب خارج هذه الدائرة. والمطلوب إيجاد نقطة حـ على هذه الدائرة بحيث يصنع المستقيمان احـ، بحـ زاويتين متساويتين مع نصف القطر وحـ.

لقد احتوى حل هذه المشكلة على معادلة من الدرجة الرابعة قام ابن الهيثم بحلها بواسطة تقاطع دائرة وقطع زائد.

لقد علم ابن الهيثم نفسه بنفسه ولجأ فى ذلك إلى كل الترجمات العربية للتراث اليونانى فى الرياضيات والفلك والفلسفة والطب فدرسها ثم ألف منها تصنيفات بلغت ثلاثة وأربعين فى الفلسفة والعلم الطبيعى وعشرين فى الرياضيات والفلك. وواحداً فى الطب. وهذه التصنيفات لم تكن تلخيصا فقط. وإنما تضمنت إضافات وتصحيحات ونقدا لآراء من سبقوه. فإذا أضفنا إلى هذا اهتماماته فى ميادين المساحة الأرضية وبناء العمائر وتخزين المياه استطعنا أن نخرج بفكرة أولية عن حجم هذه العبقرية العربية.

لقد تمكن ابن الهيثم من استخراج حجم الجسم المتولد عن دوران قطع مكافىء حول المحور الأفقى ووضع القوانين الأربعة فى حساب مجموع الأعداد الطبيعية ومجموع مربعاتها ومكعباتها والقوة الرابعة، وأعطى قوانين صحيحة لمساحات الكرة والهرم والاسطوانة والمنطقة الدائرية، وله دراسات فى موضوع تثليث الزاوية وتربيع الدائرة. وهو أول من أثبت قانون الانكسار الأول فى الضوء، وقد تلقف ديكارت وفرمات ونيوتن طريقته وأثبتوا قانون الانكسار الثانى.

وقد نشرت أول ترجمة لاتينية لكتابه المناظر فى لشبونة عام ١٥٤٢م. على يد المترجم الايطالى جيرار دى كيرمونا ولا تزال نسخة من هذه الترجمة موجودة فى مكتبة الفاتيكان، وعليها تعليقات وحواشى لورنز جبرتى الذى وضع المنظور البرونزى المشهور لأبواب الكنيسة المعمدانية فى فلورنسا.

وابن الهيثم معروف تاريخيا عند الأوربيون باسم Alhazem وقد نظمت كلية الهندسة بجامعة القاهرة فى عام ١٩٣٩ بمناسبة مرور تسعمائة سنة على وفاته سلسلة محاضرات لاحياء ذكراه عرفت باسم

(محاضرات ابن الهيثم التذكارية) كما أقامت الجمعية المصرية للعلوم الرياضية والطبيعية فى نفس العام احتفالا كبيرا لاحياء ذكراه.

(٢) **البيرونى**: (٩٧٣ - ١٠٤٨م.)

أبو الريحان محمد بن أحمد البيرونى. ولد بالقرب من خوارزم ودرس فى شبابه العلوم واللغات فكان مجيدا للفارسية والسنسكريتية والسريانية واليونانية. وسافر إلى جورجان لكى يتتلمذ على واحد من أكبر أساتذة عصره وهو أبو سهل عيسى المسيحى وكان مبرزا فى الطب والفلك والرياضيات. وفى أوائل القرن الحادى عشر عاد إلى وطنه خوارزم واشتغل استاذا فى مجمع العلوم الذى أسسه أمير خوارزم مأمون بن مأمون وكان يزامله فى هذا المجمع الشيخ الرئيس ابن سينا والمؤرخ العربى ابن مسكويه.

ولقد تعرض البيرونى لخطر شديد بعد وصوله إلى خوارزم بسنوات قليلة عندما غزا السلطان محمود الغزنوى أمارة خوارزم وأخضعها لسلطانه، فقد كان البيرونى شيعيا بينما كان السلطان محمود من السنة المتشددين. ودخل البيرونى السجن فى غزنة، لكنه استعاد مكانته عندما خلف محمود على العرش ابنه مسعود إذ قرب البيرونى منه وإستفاد بعمله الغزير وصحبه معه فى غزواته للهند، وأثمرت هذه الصحبة كتاب البيرونى المشهور (تحقيق ما للهند من مقولة مقبولة فى العقل أو مرذوله) وهو أهم كتاب تاريخى صدر عن الهند.

ولما عاد البيرونى من الهند واستقر فى بلاط السلطان مسعود أهدى إليه رسالته الضخمة فى الفلك والرياضيات والمعروفة باسم (القانون المسعودى فى الهيئة والنجوم). وهى تنقسم إلى اثنى عشر بابا وتعتبر من أكبر موسوعات الفلك والهندسة والجغرافيا، وكانت مرجعا هاما لنصير الدين الطوسى فى أرصاده بمراغة ولجمشيد الدين

الكاشى فى أرصاده بسمرقند.

وله فى الحساب والهندسة والجبر أكثر من أربع وعشرين رسالة معظمها غير منشور فى طبعات حديثة. ومن هذه الرسائل يتضح أنه اكتشف كثيرا من قوانين حساب الاستكمال المنسوبة الآن إلى نيوتن وجريجورى، كما شملت دراساته الدائرة والكرة وخواصهما.

ومن كتبه المنشورة فى الرياضيات (استخراج الأوتار فى الدائرة بخواص الخط المنحنى فيها) وقام بتحقيقه فى مصر الأستاذ أحمد سعيد الدمرداش عام ١٩٦٧. وله مؤلفات أخرى فى الطب والصيدلة والچيولوچيا كما اهتم بالميكانيكا والهيروستاتيكا ولجأ فى بحوثه إلى التجربة.

(٣) **عمر الخيام** : (١٠٤٠ ـ ١١٢٣ م)

أبو الفتح عمر بن إبراهيم الخيام. ولد فى نيسابور وقيل أنه اشتهر بالخيام لأنه احترف فى أول حياته صناعة الخيام. اشتغل بالفلسفة بالاضافة إلى الفلك والرياضيات حيث نبغ فيهما. وقد أسس له السلطان ملكشاه جلال الدين السلجوقى مرصدا توفر على العمل فيه معظم حياته، ونجح فى عمل تقويم جديد (التقويم الجلالى) كان أدق من غيره من التقاويم وهو قريب جدا من تقويم جريجورى

اشتهر بحلوله لمعادلات الدرجة الثالثة والرابعة هندسيا واستخدم نظرية ذات الحدين لأس صحيح موجب وإن كان لم يذكر نص القانون. ومن أهم مؤلفاته كتاب (توضيح مسائل فى الجبر) وفيه يرتب الصور لمعادلات الدرجة الثانية والثالثة ترتيبا منظما مع بذك جهد كبير فى حل هذه المعادلات، ومن كتبه أيضا (رسالة فى شرح ما أشكل من مصادرات إقليدس) ولا يزال المخطوط العربى لهذا لكتاب باقيا فى مكتبة ليدن. وقد اشتغل أيضا بعلم الطبيعة، ومن كتبه (الاحتيال

لمعرفة الذهب والفضة فى جسم مركب منهما) وفيه يشرح أفكاره فى الكثافة النوعية.

يعجب به الكثيرون كشاعر كبير عرف تاريخيا برباعيات الخيام التى ترجمت عدة مرات من الفارسية.

(٤) ابن يونس المصرى:

أبو سعيد بن يونس الصيرفى المصرى، ولد بمصر فى منتصف القرن العاشر. ويقول عنه ألدو مييلى فى كتاب (العلم عند العرب) إنه كان عالما نظريا من الطراز الأول، وكان يعمل فى المرصد الذى أسسه الخليفة الفاطمى بمصر العزيز بالله فوق جبل المقطم. وكان هذا المرصد جزءا من دار الحكمة التى أنشأها الفاطميون بمصر لكى تنافس الدار التى أنشأها الخليفة العباسى المأمون فى بغداد قبل ذلك بقرنين من الزمان.

وقد بدأ ابن يونس بأمر من العزيز بالله فى تأليف كتاب (الزيج الحاكمى الكبير) ويضم خلاصة أرصاده من مرصد المقطم وأكمل هذا العمل الكبير عام ١٠٠٧م وأهداه إلى الخليفة الحاكم بأمر الله. ولقد توصل ابن يونس لأول مرة إلى اكتشاف قانون حساب المثلثات.

٢ جتا س جتا ص = جتا (س + ص) + جتا (س − ص)

وكان لهذا القانون قيمة كبيرة عند المشتغلين بالفلك والحساب إذ يمكن باستخدامه الاستعاضة بالجمع عن الضرب، الأمر الذى يسهل كثيرا من العمليات الحسابية، فى الفلك، وهذه الطريقة مهدت لحساب اللوغاريتمات فيما بعد.

ولقد نشر (كوسان) النص العربى الكامل لكتاب (الزيج الحاكمى الكبير) مع ترجمة فرنسية للقسم الأكبر منه.

الاسلام مصر للطباعة

(٥) نصير الدين الطوسى: (١٢٠٠ - ١٢٧٤م)

أبو جعفر محمد بن الحسن نصير الدين الطوسى، وكان يلقب بالمحقق. قضى الطوسى شبيبة مغامرة حيث وشى به أحد وزراء الخليفة المعتصم فأودع السجن وفيه أنجز معظم تآليفه فى العلوم الرياضية، ثم أسره المغول عام ١٢٥٦ وبفضل سمعته فى العلوم والنجوم استخدمه هولاكو ضمن بطانته حتى أصبح وزيرا له وقد شهد الطوسى سقوط بغداد فى أيدى المغول عام ١٢٥٨م.

ولقد نجح الطوسى فى إقناع هولاكو ببناء مرصد مراغة الشهير وظل متوليا إدارته حتى وفاته. وتتعلق معظم كتبه بالرياضيات والفلك وإلى حد أقل بالجغرافيا والفلسفة والطب. ومن أشهر كتبه (المتوسطات بين الهندسة والهيئة) وهو محاولة لتلخيص التراث اليونانى فى الهندسة، ومن كتبه أيضا كتاب (تذكرة فى علم الهيئة) وهو خلاصة مركزه للنظريات الفلكية فى عصره وفيه ينتقد بطليموس فى كتاب (المجسطى). وهذا النقد كان الخطوة التى مهدت لكوبرنيكس القيام بإصلاحاته فى علم الفلك.

على أن من أهم أعماله دراسته الخاصة بالمسلمة الخامسة فى أصول إقليدس (مسلمة التوازى). وقد ثبت أن معرفة زخارى بعد ذلك بكتابات نصير الدين الطوسى هى بداية عمله فى الهندسة غير الاقليدية. ولقد ترجمت كتابات الطوسى فى الهندسة بواسطة العالم الانجليزى جون والس وكانت أساس محاضراته الهندسية فى جامعة أوكسفورد فى القرن السابع عشر.

وقد ألف أيضا فى حساب المثلثات والفلك والجبر وإنشاء الاسطرلاب وكيفية استعماله. ففى حساب المثلثات كان الطوسى أول من وصفه كعلم مستقل عن الفلك فى رسالته (كتاب الشكل القطاع)، وعليه اعتمد الأوربيون زمنا طويلا فى تدريس حساب المثلثات

المستوية والكروية، وترجم هذا الكتاب إلى اللاتينية والانجليزية والفرنسية. وللطوسى فى الهندسة أيضا (كتاب تحرير أصول إقليدس)، (الرسالة الشافية عن الشك فى الخطوط المتوازية) وفيها حاول أن يستنبط المسلمة الخامسة لاقليدس (مسلمة التوازى) من المسلمات الأربع الأولى الواردة فى كتاب الأصول.. وهناك من يرى أن الطوسى قد اطلع على أعمال الخيام فى قضية التوازى.

ونحن نعلم اليوم بعد جهود الأوربيين فى هذا الاتجاه أن هذه المحاولات كان مقضيا عليها بالفشل، فقد ثبت أنه يستحيل استنباط المسلمة الخامسة من المسلمات الأربع الأولى. إلا أن هذه الجهود قد أثمرت اكتشاف هندسات أخرى غير الهندسة الاقليدية بإسقاط المسلمة الخامسة من المنظومة الهندسية.

وللطوسى أيضا مؤلفات أخرى فى الأخلاق والفلسفة وعلم الكلام.

(٦) جابر بن أفلح:

أبو محمد جابر بن أفلح، ولد بأشبيليه بالأندلس فى أواخر القرن الحادى عشر وتوفى بقرطبة فى منتصف القرن الثانى عشر الميلادى.

وقد عرف عند الأوربيين باسم Geber وسبب ذلك خلطا بينه وبين جابر بن حيان الكيميائى.

ألف تسعة كتب فى الفلك والرياضيات ومن أهمها (كتاب الهيئة) ويعرف عادة باسم (كتاب إصلاح المجسطى) وفيه ينتقد آراء بطليموس فى الفلك نقدا شديدا.

وربما كانت أهم من ذلك دراساته المتعلقة بحساب المثلثات الكروية التى طورها فى هذا الكتاب، ومنها قانون المثلث الكروى القائم الزاوية فى حـ:

حتا أ = جتا أ حا ب

وقد اشتهر هذا القانون عند الأوربيين فى عصر النهضة باسم (قانون جابر) كما ينسب إليه اختراع بعض الآلات الفلكية.

تقول عنه دائرة المعارف البريطانية إن لكتب جابر بن أفلح مقاما كبيرا فى تاريخ علم حساب المثلثات.

وهناك علماء كثيرون لم يتسع المقام لذكرهم مثل أبو كامل بن أسلم الحاسب المصرى والماهانى وأبو الوفا البوزجانى والبتانى والكرفى وابن الياسمين والحصار وابن بدر والطيبى والكاشى والقلصاوى وابن حمزة وبهاء الدين الآملى.

أمثلة للأنشطة الجبرية عندالعرب :

(١) كان العرب ـ كما ذكرنا سابقا ـ هم أول من استخدموا كلمة «الجبر» كخطوة من خطوات حل المعادلات، وفى هذا ما يعنى أنه يمكن اعتبارهم روادا فى فصل الجبر عن الحساب والنظر إليه كعلم مستقل.

(٢) استخدم العرب الاختزال للتعبير عن المجهول وعن القوى المختلفة للمجهول وللعمليات الحسابية وبذلك يعتبرون قد خطوا خطوة كبيرة نحو الترميز. فمثلا استخدموا الحرف حـ للدلالة على الجذر التربيعى والحرف ش للرمز على المجهول (ما نرمز له حاليا بالرمز س) والحرف م ليدل على المال (س^{٢}) والحرف ل ليعنى يساوى.

(٣) صنفوا المعادلات ووضعوا قواعد لحل كل صنف.

فمثلا صنف الخوارزمى المعادلات إلى خمسة أقسام هى :

أموال تعدل جذورا مثل ٢س^{٢} = ٣س
أموال تعدل عددا مثل ٥س^{٢} = ١٠
جذور تعدل عددا مثل ٢س = ٦
أموال وجذور تعدل عددا مثل ٣س^{٢} + ٢س = ٨

جذور وعدد تعدل أموالا مثل ٧س + ١٥ = ٢س^{٢}
كما صنفها عمر الخيام إلى تصنيفات أخرى.

(٤) كان العرب يعرفون قوانين حل معادلات الدرجة الثانية وكان لهم قانون لكل صنف من تصنيفاتهم لتلك المعادلات.

فمثلا لحل المعادلة:

٢س^{٢} + ١٠س = ٤٨ والتى جاءت كالآتى:

مالان وعشرة أجزاء تعدل ثمانية وأربعين درهما.

سار الحل لفظيا كالآتى بلغة «الخوارزمى»:

ترد المالين إلى مال واحد وقد علمت أن مالا من مالين نصفهما، فاردد كل شىء فى المسألة إلى نصفه فكأنه قال: مال وخمسة أجزاء ليعدل ٢٤ درهما (لاحظ هنا اختصار المعادلة لتصبح س^{٢} + ٥س = ٢٤) ومعناه مال إذا زادت عليه خمسة أجزاء بلغ أربعة وعشرين. ننصف الأجزار فتكون اثنين ونصف، يبقى ثلاثة وهو جذر المال، والمال تسعة.

ومعنى ذلك أن الخوارزمى حل المعادلة التى بالصورة

$$\text{س}^{٢} + \text{ب س} = \text{حـ} \quad \text{بالقانون} \quad \text{س} = \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢} + \text{حـ}} - \frac{\text{ب}}{٢}$$

وفى مسألتنا س^{٢} + ٥س = ٢٤

$$\text{س} = \sqrt{\left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢} + ٢٤} - \frac{٥}{٢} = \sqrt{\frac{١٢١}{٤}} - \frac{٥}{٢}$$

$$= \frac{١١}{٢} - \frac{٥}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

ويلاحظ هنا إهمال الحل السالب إذ أن لهذه المعادلة باللغة الجبرية الحديثة حلين هما س = ٣ ، س = −٨

وبالنسبة لمسألة مثل «مال وواحد وعشرون من العدد يعدل عشرة

الاسلام مصر للطباعة

أجذاره» والتى تؤول إلى المعادلة

$$س^٢ + ٢١ = ١٠ س$$

استخدم الخوارزمى القانون

$$س = \frac{ب}{٢} \pm \sqrt{\left(\frac{ب}{٢}\right)^٢ - حـ}$$

حيث ب معامل س، حـ الحد المطلق وحصل على الجذرين ٣، ٧.
وقد وصف ابن الياسمين حل هذا النمط فى أرجوزتة مقبولة:

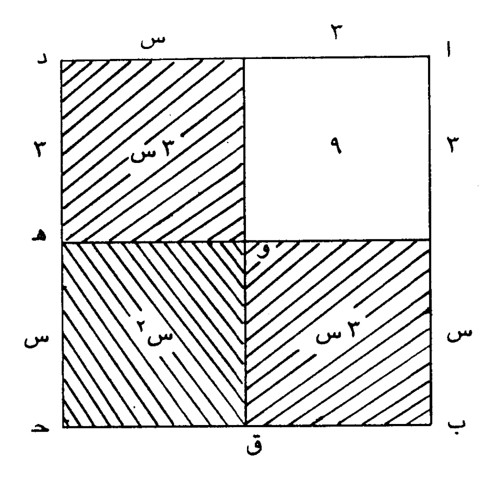
واطرح من التربيع فى الأخرى العدد — وجذر ما يبقى عليه يعتمد
فاطرحه من تصنيفك الأجذارا — وإن تشأ أجمعته اختيارا
فذاك جذر المال بالنقصان — وذاك جذر المال بالجملان

فالبيت الأول يعنى $\left(\frac{١٠}{٢}\right)^٢ - ٢١ = ٤$، $\sqrt{٤} = ٢$
والبيت الثانى يعنى ٥ − ٢ = ٣، ٥ + ٢ = ٧
والبيت الثالث يعنى أن جذرى المعادلة هما ٣، ٧

(٥) استخدم العرب طرقا هندسية لحل بعض معادلات الدرجة الثانية.

فمثلا: لحل المعادلة $س^٢ + ٦س = ٧$

استخدم العرب الطريقة الهندسية التالية التى حصلوا منها على حل واحد للمعادلة هو الجذر الموجب. وقد سارت خطوات العمل كالآتى:



شكل (٢٤)

ارسم مربعا طول ضلعه مجهول (س) مثل و ق حـ هـ

نصف الأجذار (٦ س) أى $\frac{٦}{٢}$ = ٣

مد أضلاع المربع الأول بطول قدره ٣ فتحصل على المربع ا ب حـ د الذى طول ضلع من أضلاعه يساوى س + ٣

مساحة المربع ا ب حـ د = مساحة الشكل المظلل + مربع مساحته ٩

مساحة الشكل المظلل = $س^٢$ + ٦ س

ولكن $س^٢$ + ٦ س = ٧ من المعطيات

بإضافة ٩ إلى الشكل المظلل نحصل على المربع ا ب حـ د

أى أن

مساحة المربع ا ب حـ د = ٧ + ٩ = ١٦

ومنها ينتج أن

طول ضلع المربع ا ب حـ د = ٤

ولكننا نعلم أن طول ضلع المربع ا ب حـ د = س + ٣

إذن

$س + ٣ = ٤$

ومنها $س = ١$

أى أن

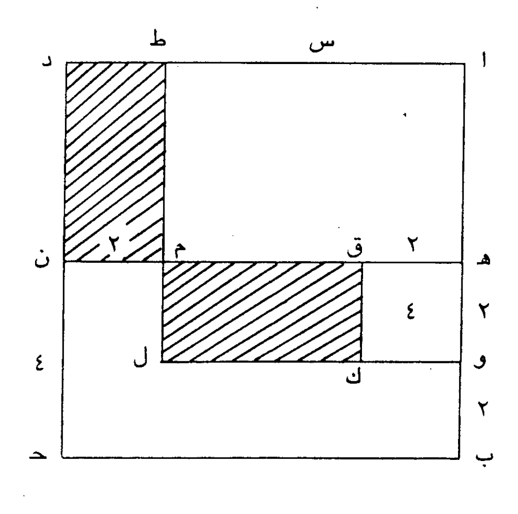
حل المعادلة $س^{٢} + ٦س = ٧$

هو $س = ١$

مثال آخر للحل الهندسى:

لحل المعادلة $س^{٢} = ٤س + ٥$

يسير العمل فى خطوات كالآتى:



الشكل (٢٥)

ارسم المربع ا ب حـ د مساحته $س^{٢}$ أى طول ضلعه مجهول وليــكن س

خذ نقطة هـ على ا ب بحيث ب هـ = ٤ ($\frac{١}{٢}$ معامل س)

الاسلام مصر للطباعة

نصف ب هـ فى و فيكون وهـ = ٢

إرسم المربع هـ وك ق فيكون مساحته تساوى $(٢)^٢$ = ٤

مد وك إلى ل بحيث ك ل = اهـ ثم أكمل المستطيل ق ك ل ق

مساحة المستطيل ق ك ل م تساوى مساحة المستطيل ط م ن د

مساحة المربع ا ب حـ د = $س^٢$

مساحة المستطيل هـ ب حـ ن = ٤ س

إذن: مساحة المستطيل ا هـ ن د = ٥

لأن $س^٢$ = ٤س + ٥

مساحة ا هـ ن د = مساحة ا هـ م ط + مساحة ط م ن د

= مساحة ا هـ م ط + مساحة هـ ك ل م

∴ مساحة ا هـ م ط + مساحة هـ ك ل م = ٥

∴ مساحة المربع ا و ل ط = ٥ + ٤ = ٩

∴ طول ضلع المربع ا و ل ط = $\sqrt{٩}$ = ٣

∴ ا و = ٣

ولكن و ب = ٢

∴ ا ب = ٥

∴ طول ضلع المربع ا ب حـ د = س

∴ س = ٥ وهو حل المعادلة المعطاة.

(٦) استخدم العرب طريقة الخطأ وطريقة الخطأين فى حل المعادلات الدرجة الأولى.

ونعرض فيما يلى مثالا للحل بطريقة الخطأين:

«إذا قيل لك مال جمع ثلثه وخمسه فكان أربعا وعشرين فكم المال؟»

وباللغة الحالية فإن الأمر يتطلب حل المعادلة

$\frac{١}{٣}$س + $\frac{١}{٥}$س = ٢٤

ويسير حساب الخطأين كالآتى:

إفرض أن المال ١٥ (مفروض أول)

$\frac{١}{٣} \times ١٥ + \frac{١}{٥} \times ١٥ = ٨$

وحيث أن $\frac{١}{٣}$ المال + $\frac{١}{٥}$ المال = ٢٤ فهناك خطأ بالنقصان هو

٢٤ − ٨ = ١٦ (خطأ أول)

إفرض أن المال ٣٠ (مفروض ثان)

$\frac{١}{٣} \times ٣٠ + \frac{١}{٥} \times ٣٠ = ١٦$

ولكن $\frac{١}{٣}$ المال + $\frac{١}{٥}$ المال = ٢٤

∴ هناك خطأ بالنقصان هو ٢٤ − ١٦ = ٨ (خطأ ثان)

المفروض الأول × الخطأ الثانى = ١٥ × ٨ = ١٢٠

= المحفوظ الأول

المفروض الثانى × الخطأ الأول = ٣٠ × ١٦ = ٤٨٠

= المحفوظ الثانى

الفرق بين المحفوظين الأول والثانى = ٤٨٠ − ١٢٠ = ٣٦٠

الفرق بين الخطأين = ١٦ − ٨ = ٨

المجهول = الفرق بين المحفوظين / الفرق بين الخطأين

$= \frac{٣٦٠}{٨} = ٤٥$

وقد كان بعض الرياضيين العرب يحلون هذه المسألة باستخدام وسيلة تعليمية مرسومة على شكل ميزان قبانى ذى قبة وكفتين ولذا سميت بطريقة القرطسون أو طريقة الكفات. ويسير حل المسألة السابقة كالآتى:

لاحظ أن المسألة هى $\frac{١}{٣}$س + $\frac{١}{٥}$س = ٢٤

٢٤

٣٠ ١٥

٨ ١٦

شكل (٢٦)

ضع ٢٤ على القبة
ضع المفروض الأول وليكن ١٥ على إحدى الكفتين
قابل شروط المسألة بالعدد ٢٤ واحسب الفرق (الفضل)
ثم ضع الفضل تحت الكفة (٢٤ – ٨ = ١٦)
ضع المفروض الثانى وليكن ٣٠ على الكفة الثانية
قابل شروط المسألة بالعدد ٢٤ واحسب الفرق (الفضل)
ثم ضع الفرق تحت الكفة (٢٤ – ١٦ = ٨)
إضرب فضل الكفة الأولى (١٦) فى الكفة الثانية (٣٠)
= ١٦ × ٣٠ = ٤٨٠ واحفظه
إضرب فضل الكفة الثانية (٨) فى الكفة الأولى (١٥)
= ٨ × ١٥ = ١٢٠ واحفظه
إطرح المحفوظين فيتولد ٣٦٠ (٤٨٠ – ١٢٠)
إقسم فضل المحفوظين على فضلى الكفتين يتولد المجهول
$\frac{٣٦٠}{٨}$ = ٤٥ وهو حل المعادلة

(٧) عالج العرب أنواعا متعددة من المعـادلات السـيالة (غيـر المعينة) فقد كانوا يوجدون حلولا متعددة لمعادلات تحتوى على أكثر من متغير.

فمثلا : أعطى الكسر فى مسألة يمكن أن نعبر عنها بالرموز كالآتى :

لايجاد س، ص، ع بحيث س^{٢} + ص^{٢} = ع^{٢}

وقد حل الكرخى المسألة كما يلى :

ضع س = $\frac{ن^{٢}}{م^{٣} + ١}$ ، ص = م س ، ع = ن س

فإذا أخذنا م = ٢ ، ن = ٣ نجد أن

س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣

وبهذا تتحقق س^{٣} + ص^{٣} = ع^{٣}

(٨) حل العرب بعض أنواع معادلات الدرجة الثالثة والدرجة الرابعة. وقد اهتم الخيام بصفة خاصة بمعادلات الدرجة الثالثة وصنفها إلى ١٣ صنفا من الأنواع التى لها جذور موجبة وقد مهد بذلك إلى نظرية عامة لحل معادلات الدرجة الثالثة. وقد استخدم الخيام الطرق الهندسية لحل المعادلة.

س^{٣} + ب^{٢}س + ا^{٣} = حـ س^{٢}

كما حل البوزجانى معادلات من الدرجة الرابعة بالصورة

س^{٤} = م ، س^{٤} + ا س^{٣} = ب

وحل الخيام مسائل هندسية تؤول إلى معادلات من الدرجة الرابعة.

(٩) وضع ثابت بن قرة قاعدة لايجاد الأعداد المتحابة وكانت قاعدة ثابت كالآتى:

ليكن ا = ٣ × ٢^{ن} − ١

، ب = ٣ × ٢$^{ن - ١}$ − ١

، حـ = ٩ × ٢$^{٢ن - ١}$ − ١

عندما يكون ا، ب، حـ أعدادا أولية فإن العددين

٢^{ن} ا ب، ٢^{ن} حـ يكونان عددين متحابين.

فمثلا :

ا = ٣ (٢)^{٢} − ١ = ١١

ب = ٣ (٢) − ١ = ٥

حـ = ٩ (٢)^{٣} − ١ = ٧١

وحيث أن ١١، ٥، ٧١ أعداد أولية

∴ العددان

٢^{ن} اب = ٤ × ١١ × ٥ = ٢٢٠

، ٢^{ن} حـ = ٤ × ٧١ = ٢٨٤

عددان متحابان

(١٠) عرف العرب قوانين مجموع المتواليات الحسابية والهندسية فمن بين القواعد التى وضعها أبو عبد الله محمد الشهير بابن بدر فى الجبر القاعدة التالية لجمع الأعداد التى على شكل متوالية عددية : .

إذا تفاضلت الأعداد بعـدة معلـومة دون التضـعيف، فـاضرب التفاضل فى عدة الأعداد إلا واحدا، فمـا بلـغ فـاحمل عليـه أول الأعداد. يكن ذلك آخر الأعداد. اجمل عليه أول الأعداد واضربـه فى نصف العدة يكن ذلك المطلوب.

والمقصود بتفاضل الأعداد هنا الفرق بين كل عددين متتاليين

والمقصود بعدة الأعداد هو عدد الأعداد أو عدد حدود المتوالية

فمثلا :

لايجاد مجموع الأعـداد ١، ٣، ٥، ٧، ٩، ١١، ... إلـى عشرة حدود :

تفاضل الأعداد = ٣ − ١ = ٢

عدة الأعداد = ١٠

أول الأعداد = ١

آخر الأعداد = ١ + ٢(١٠ − ١) = ١٩

آخر الأعداد + أول الأعداد = ١٩ + ١ = ٢٠

مجموع الأعداد = ٢٠ × $\frac{١٠}{٢}$ = ١٠٠

ومن هذا يتضح أن ابن بدر عرف القانون التاليين:

لتكن ا، ا + د ، ا + ٢د ، ... إلى ن من الحدود، متوالية عددية عدد حدودها ن

الحد الأخير (ل) = ا + (ن − ١) د

مجموع الحدود = $\frac{ن}{٢}$ (ا + ل)

(١١) عرف العرب مجموع الأعداد الطبيعية مرفوعة إلى قوى تصل إلى ٤ مثل ١ + ٢ + ٣ + ...

، $(١)^٢ + (٢)^٢ + (٣)^٢ + (٤)^٢ + ...$

، $(١)^٣ + (٢)^٣ + (٣)^٣ + (٤)^٣ + ...$

، $(١)^٤ + (٢)^٤ + (٣)^٤ + (٤)^٤ + ...$

(١٢) مهد بعض العلماء مثل ابن يونس عن طريق العلاقات بين النسب المثلثية وابن حمزة عن طريق دراساته فى المتواليات الحسابية والهندسية إلى ظهور اللوغاريتمات.

(١٣) عرف الخيام وبعده الطوسى مفكوكات ذات الحدين والعلاقة بين معاملات حدود ذات الحدين والتى ظهرت فيما بعد باسم مثلث باسكال، ويعتقد أن الطوسى كان يعرف تلك العلاقات .

فمثلا: لاحظ المعاملات فى المفكوكات التالية:

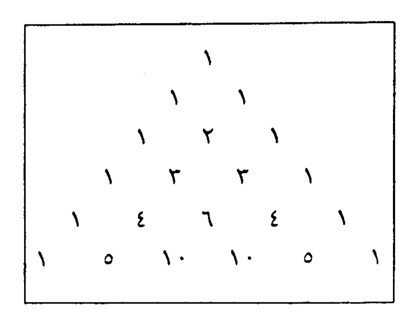
(ا + ب) = ا + ب   المعاملات ١، ١

$(ا + ب)^٢ = ا^٢ + ٢ اب + ب^٢$ المعاملات ١، ٢، ١

$(ا + ب)^٣ = ا^٣ + ٣ا^٢ب + ٣ اب^٢ + ب^٣$

والمعاملات هى ١، ٣، ٣، ١

ويمكن وضع المعاملات السابقة فى الشكل التالى الذى يمكن أن نستنتج منه المعاملات المفكوكة (ا + ب)^{٤} ، (ا + ب)^{٥} ، ...



شكل (٢٧)

ويعرف الشكل (٢٧) باسم مثلث باسكال ويعتقد أن الطوسى كان يعرف مثل هذه العلاقات.

كما بحث الخيام فى النظرية القائلة بأن مجموع عددين مكعبين لا يمكن أن يكون مكعبا.

(١٤) ربط العرب بين الجبر والهندسة مما يعتبر تمهيدا للهندسة التحليلية والتى تعتبر بدورها تمهيدا لحساب التفاضل والتكامل.

(١٥) أعطى العرب فى كتبهم الكثير من المسائل الحسابية الطريقة والتى تتسم بالنواحى العملية والتطبيقية ومن أمثلتها:

- سمكة ثلثها فى الطين وربعها فى الماء والخارج منها ثلاثة أشبار. كم أشبارها؟

- رمح مركوز فى حوض والخارج منه عن الماء خمسة أذرع فمال مع ثبات طرفه حتى لاقى رأسه سطح الماء. وكان البعد بين مطلعه فى الماء وموضع ملاقاة رأسه له عشرة أذرع. كم طول الرمح؟

- امرأة تزوجت ثلاثة أزواج فأصدقها الأول شيئا مجهولا وأصدقها

الثانى جذر ما أصدقها الأول ودرهما وأصدقها الثالث ثلاثة أمثال ما أصدقها وأربعة دراهم فكان المجموع أربعين..

فكم درهما أصدقها كل منهم ؟

ـ دخل عدد من الأشخاص بستانا فقطع الأول تفاحة واحدة وقطع الثانى تفاحتين وقطع الثالث ثلاث تفاحات... وهكذا. ثم جمع هؤلاء الأشخاص ما قطعوه وقسموه فيما بينهم بالتساوى فأصاب الواحد منهم سبع تفاحات. أوجد عدد الأشخاص الذين دخلوا البستان وعدد ما قطعوه من التفاح ؟

الاسلام مصر للطباعة

الفصل الخامس
تطور علم الجبر
(الحضارة الغربية المعاصرة)

الاسلام مصر للطباعة

عصور الظلام :

يطلق المؤرخون على الفترة الزمنية من منتصف القرن الخامس وحتى القرن الحادى عشر الميلادى اسم العصور المظلمة فى أوربا. إذ أن الحياة فى أوربا الغربية فى تلك الفترة وصلت إلى مرحلة شديدة التدنى من حيث العلم والثقافة والحياة الاجتماعية. ولعل من أشهر الرياضيين فى تلك الفترة كان الراهب جربرت Gerbert (٩٥٠ - ١٠٠٣ ميلادية) الذى درس فى المعاهد العربية الاسلامية التى كانت مزدهرة فى الأندلس، ويعتقد أنه الرياضى الذى نقل إلى أوربا الأرقام العربية وإن كانت بدون الصفر، ورغم انتخابه للبابوية إلا أنه كان مغرما بالدراسات الرياضية والفلكية وبناء بعض الأجهزة الميكانيكية.

وفى عصر جربرت بدأت مرحلة انتقالية شهدت وصول العلوم الاغريقية والعربية إلى أوربا من خلال كتابات الرياضيين العرب الذين كانوا قد ترجموا التراثين الاغريقى والهندى بالاضافة إلى إنجازاتهم العربية الخالصة.

وفى أوائل القرن الثانى عشر قام أديلارد أوف باث (١٢٢٠م) بترجمة كتاب الأصول لاقليدس وجداول الخوارزمى الفلكية من العربية إلى اللاتينية. وكان أديلارد يعرف اللغة العربية ودرس فى الأندلس كما زار اليونان وسوريا ومصر.

ومن أشهر مترجمى تلك الفترة كان جيرارد دى كريمونا (١١١٤ - ١١٨٧م) الذى ترجم أكثر من ٩٠ كتابا عربيا كان من بينها كتاب جبر الخوارزمى وكتاب المجسطى لبطليموس وكتاب المناظر لابن الهيثم.

ولعبت المدن التجارية مثل جنوة والبندقية وميلانو وبـالرمو دورا هاما فى الاتصال بالحضارات الشرقية والعربية المتطورة فى تسـجيل الأعداد وإجراء العمليات الحسابية.

وكان لها دور هام فى نشر النظام العربى فى العمليات الحسابية.

وعلى عتبة القرن الثالث عشر ظهر الرياضى المـوهوب **فيبوناتسى** الذى ولد عام ١١٧٥، وكان أبوه يعمل بالتجارة ومن خلال مصـاحبة أبيه اقتنع بتفوق الطرق العربية فى العمليات الحسـابية والـرياضية مما دعاه إلى نشر كتابه فى الحساب فى عام ١٢٠٢م والذى عالج فيه الحساب والجبر متأثرا بأعمال الخوارزمى وأبو كامل.

وقد حل فى هذا الكتاب **معادلات** مـن الـدرجة الأولـى والثـانية مستخدما طرقا جبرية، ولكن جبر **فيبوناتسى** كان أيضـا لا يعتـرف بالجذور السالبة والتخيلية للمعادلات كما أنه كان كلاميا. وقـد ظـل كتابه مرجعا لمؤلفى الكتب بعد ذلك لاحتوائه على عدد كبيـر مـن المسائل. وفى عام ١٢٢٥م نشر **فيبوناتسى** كتابا عن المعـادلات غيـر المعينة بالاضافة ألى كتب أخرى فى الهنـدسة والمثلثـات وشـارك **فيبوناتسى** فى المسابقات الرياضية التى كانت شهيرة فى القرن الثالث عشر فى جامعات باريس وأكسفورد وكامبريدج ونابلى والتـى قـامت بدور كبير فى احتضان مشاهير الرياضيين وتطوير الـرياضيات بعـد ذلك.

ولم يشهد القرن الرابع عشر تطورا كبيرا فى الـرياضيات بسـبب الامراض والحروب التى عمت أوربا. ولعل أشهر الـرياضيين فى ذلك القـرن كان أورزم Oresme (١٣٢٣ - ١٣٨٢) وربمـا يعـود إليـه استخدامه لأول مرة **أساً كسريا**.وقد ظهرت فى كتاباته تحـديد نقـاط بواسطة الاحداثيات. ورغم انتشار الرياضيات العملية والحسـابية فى أوربا فى العصور الوسطى بصفة عامة إلا أن بعض التنظير وفلسـفة

الاسلام مصر للطباعة

الرياضيات كانت تظهر عند بعض الرياضيين حيث ظهرت أفكار أولية عن فكرة اللانهاية والاتصال.

عصر النهضة:

ومع بداية عصر النهضة فى أوروبا فى القرن الخامس عشر بدأت حركة ترجمة للكتب الاغريقية عن اليونانية نفسها بعد أن كانت المعارف الاغريقية تصل عن طريق الترجمات العربية كما بدأت الطباعة تنتشر مما أدى إلى رواج الكتب ونشر المعرفة على مدى واسع. وشهدت المدن الايطالية ومدن أواسط أوروبا بصفة عامة مثل براغ ونورمبرج ازدهارا فى الرياضيات خاصة فى الحساب والجبر والمثلثات نتيجة ازدهار التجارة والملاحة والفلك والمساحة. ومن الرياضيين فى القرن الخامس عشر بيرباخ (١٤٢٣ - ١٤٦١) ومولر (١٤٣٦ - ١٤٧٦).

وفى ذلك القرن ظهر الرياضى الفرنسى شوكيه الذى ألف كتابا فى الحساب عام ١٤٨٤م ولكنه لم ينشر إلا فى القرن التاسع عشر. وقد عالج الكتاب العمليات الحسابية بالأعداد الصحيحة والكسرية، والأعداد غير النسبية ونظرية المعادلات. واعترف شوكيه بالأسس الموجبة والسالبة الصحيحة وقدم جبره فى الصور الاختزالية.

ومن أشهر الكتب التى ظهرت فى القرن الخامس عشر كتاب ملخص الحساب والهندسة والنسبة والتناسب المعروف باسم سوما أى الملخص. ومؤلف الكتاب هو لوقا باسيولى (١٤٤٥ - ١٥٠٩م) وكان الكتاب ملخصا لرياضيات عصره ولا يختلف كثيرا عما جاء بكتاب **فيبوناتسى** سوى فى تطوير الرموز. ويتناول الجزء الجبرى من كتاب الملخص حل المعادلات من الدرجة الثانية ويحتوى على كثير من المسائل التى تؤول فى حلها إلى تلك المعادلات. واستخدم باسيولى الحروف (ا) للدلالة على الجمع، والحرف (m) للدلالة على

الطرح، والحرفين (co) للدلالة على المجهول الذى نرمز لـه حـاليا بالرمز س، كما استخدم (ce) للدلالة على س^{2}، (cece) للدلالة على س^{4}. كذلك أشار إلى التساوى بالحرفين (ae).

وقد نشر باسيولى كتابا آخر يحتوى على رسوم مجسمة يعتقد أن ليونارد دى فينشى قام برسمها. وقد كان أول ظهور للرمزين + ، − فى كتاب حساب ظهر عام ١٤٨٩ وألفه ويدمان وكانـت « + » تعنـى «زيادة»، « − » تعنى «نقص». وقد استخدم الرمزين + ، − كرموز لعمليات جبرية فى عام ١٥١٤ بواسطة الرياضى الألمانى ڤاندر هـويك (Hoecke).

وشهد القرن السادس عشر تطورا كبيرا فى اسـتخدام وانتشـار الرموز الجبرية. ومن الكتب ذات الأهمية التاريخية فى هذا المجـال كتاب روبرت ريكورد (Recorde) الذى طبع عام ١٥٥٧ الذى عالج فيه قضايا جبرية، وقد ظهر فى هذا الكتاب لأول مرة رمز علاقة التساوى والممثل بقطعتين مستقيمتين متسـاويتين فى الـطول، وهـو الـرمز المعروف حاليا (=) وقدم رادولف فى كتابه عن الجبر عـام ١٥٢٥ الرمز المستخدم للجذر ($\sqrt{\quad}$) وربما كان مشـتقا مـن الحـرف اللاتينى r أول حـرف فى كلمـة (radix). ويعتبـر سـتيفل Stifel (١٤٨٦ − ١٥٦٧) أعظم عالم جبر ألمانى فى القرن السـادس عشر. وأشهر كتبه ظهر عام ١٥٤٤ فى ثلاثة أجزاء عن الأعـداد النسـبية وغير النسبية والجبر، وربط فى الجزء الجبرى بين متـوالية حسـابية ومتوالية هندسية ممهدا بذلك لـظهور اللـوغاريتمات (وإن كان بعض الرياضيين العرب قد قاموا بمثل هـذا العمل قبل ذلك). كذلك أعطى سـتيفل مفكوكات لذات الحـدين تصـل إلى القـوة السـابعة عشر أى إلى $(ا + ب)^{17}$، كما تضمن الكتاب بعض أعمال اقليدس الجبرية كما عالج المعادلات.

وفى هذا الكتاب رفض ستيفل الجذور السالبة للمعادلة واستخدم الرموز + ، − ، $\sqrt{\ }$ ورمز للمجهول بأحد الحروف. وقد انغمس ستيفل فى دراسة خواص الأعداد وغيبياتها. وقد أصيب بداء التطرف والتزمت الدينى داعيا أتباعه من الفلاحين إلى الامتناع عن أعمال الزراعة والفلاحة فى الحقول والتخلى عن ممتلكاتهم واقتصار أنشطتهم على العبادات. وكانت فكرة تفسير الأعداد والأرقام الواردة فى الكتب المقدسة هى إحدى الغيبيات المنتشرة فى ذلك الوقت.

ومن أعظم الانجازات الرياضية فى القرن السادس عشر هو اكتشاف الحل العام لمعادلات الدرجة الثالثة والرابعة. ففى عام ١٥١٥ حل الرياضى الايطالى فيرو (Ferro) والأستاذ بجامعة بولونيا ــ حل المعادلة التكعيبية س^{٣} + م س = ن، بطريقة جبرية (ومن المعتقد أنه اطلع على الحلول التى وجدت فى الكتب العربية لمثل هذه المعادلة). وفى عام ١٥٣٥ ادعى نيكولو أوف بريسكيا والمعروب باسم تارتاجليا (وتعنى المتلعثم لأنه كان عيى اللسان بسبب إصابته بمرض فى الطفولة أعاقه فى الكلام) ــ ادعى أنه اكتشف حلا جبريا للمعادلة س^{٣} + ق س = ن. وقد تحدى فيرو تارتاجليا إلى مسابقة فى حل معادلات الدرجة الثالثة فاز فيها تارتاجليا حيث تمكن من حل نوعين من معادلات الدرجة الثالثة بينما تمكن فيرو من حل نوع واحد فقط.

وفى عام ١٥٤٥ نشر كاردان كتابه الجبرى المعنون «الفنون العظيمة» وظهر فيه حلول معادلات الدرجة الثالثة.

وقد كان الحل الذى قدمه كاردان للمعادلة

س^{٣} + م س = ن كالآتى:

اعتبر المتطابقة

(ا − ب)^{٣} + ٣ا ب(ا − ب) = ا^{٣} − ب^{٣}

خذ ا، ب بحيث

٣ا ب = م (١) ، ا^{٣} − ب^{٣} = ن (٢)

الاسلام مصر للطباعة

وبحل المعادلتين (١)، (٢) آنيا نحصل على

$$ا = \sqrt[٣]{(\frac{ن}{٢}) + \sqrt{(\frac{ن}{٢})^{٢} + (\frac{م}{٣})^{٣}}}$$

$$، \quad ب = \sqrt[٣]{-\frac{ن}{٢} + \sqrt{(\frac{ن}{٢})^{٢} + (\frac{م}{٣})^{٣}}}$$

وبأخذ ا − ب = س تحصل على حل المعادلة.

وقد حل فرارى Ferrari (تلميذ كاردان) معادلة من الدرجة الرابعة وقد ظهرت فى كتاب كاردان. وكانت طريقة فرارى فى حل معادلات الدرجة الرابعة باختزالها إلى صورة من معادلات الدرجة الثالثة ثم الثانية.

وقد ظهرت حلول جبرية كثيرة للمعادلات العامة من الدرجة الثالثة والرابعة ومن بين من اشتغلوا فى تلك الحلول فى القرن السادس عشر الرياضى الفرنسى فيتا (Vitta) وفى القرن السابع عشر ديكارت Descartes.

وقد حاول أويلر (عام ١٧٥٠) حل معادلة الدرجة الخامسة بتحويلها إلى إحدى صور معادلات الدرجة الرابعة، ولكنه فشل كما فشل غيره من بعده مثل لاجرانج إلى أن ثبت فعلا عدم إمكانية وجود قانون عام لحل معادلة الدرجة الخامسة والذى أدى البحث فيها إلى ظهور نظرية الزمر (Groups). وقد اشتغل فى نظرية المعادلات الكثيرون من الرياضيين مثل آبل (Abel) وجالوا (Galois)، جوردان (Jordan) ممن أدت أبحاثهم إلى ظهور الكثير من مفاهيم الجبر الحديث.

ونعود إلى كاردان الذى كان من أعظم منجزاته فى الجبر أنه استخدم الجذور السالبة للمعادلات كما أنه اهتم بحسابات الأعداد التخيلية كما اشتغل بإيجاد قيم تقريبية لجذور المعادلات كما كتب دليلا للمقامرين معتمدا على فكرة الاحتمالات.

الاسلام مصر للطباعة

وقد مر كاردان بأطوار غريبة رغم عبقريته الرياضية بعد أن اشتغل بالتنجيم. وقد روى عنه أنه قطع أذنى ابنه الصغير كما أنه انتحر فى تاريخ معين كان قد تنبأ بأنه سيموت فيه.

وقبل وفاة كاردان ببضع سنوات نشر بومبلى كتابا فى الجبر (عام ١٥٧٢) عالج فيه حل معادلات الدرجة الثالثة من نوع الحالات غير القابلة للاختزال. كما أنه أضاف إلى التطور فى استخدام الرموز الجبرية.

ولعل أشهر رياضى فرنسى فى القرن السادس عشر كان ڤيتا (Vitta) وكان محاميا وعضوا فى البرلمان الفرنسى ولكنه كان يقضى وقت فراغه فى دراسته الرياضية. ومما يروى عنه أنه حل معادلة من الدرجة ٤٥ كان أحد السفراء قد تحدى بها الملك هنرى الرابع الذى استدعى ڤيتا، حيث قدم ڤيتا فى بضع دقائق جذرين للمعادلة ثم بعد ذلك أعطى ٢١ جذرا آخر، ولكن ڤيتا لم يفطن إلى الجذور السالبة لتلك المعادلة.

ويقال أن ڤيتا كان يحبس نفسه أياما طوالا عندما ينشغل بالرياضيات . ومن أعظم إنجازات ڤيتا تطوير الرموز الجبرية وساتخدام حروف مثل س ، ص ، ع للمجاهيل ، وحروف مثل أ ، ب ، جـ للثوابت . وقد أعطى ڤيتا طرقا لايجاد قيم تقريبية لجذور المعادلات وأظهر عبقرية فى نظرية المعادلات وتحويلات المعادلات من صورة لأخرى . وقد طبق ڤيتا الجبر وحساب المثلثات فى الهندسة ، وحاول حل المشكلات الثلاثة القديمة (وهى تربيع الدائرة وتثليث الزاوية وتضعيف المكعب) .

وشهد القرن السادس عشر رياضيين كثيرين نذكر منهم ستيڤن Stevin (١٥٨٤ - ١٦٢٠) ويعود الفضل إليه فى تطوير الكسور العشرية بالاضافة إلى دراساته فى الميكانيكا. كما نذكر الفلكى

البولندى الشهير كوبرنكس (١٤٧٣ - ١٥٤٣).

وخلاصة القول أن القرن السادس عشر شهد بداية الجبر الرمزى وتقنين وانتشار الحساب العربى والكسور العشرية وحل معادلات الدرجة الثالثة والرابعة وتقدم نحو نظرية المعادلات. وبدأ الرياضيون يتقبلون الأعداد السالبة والأسس كما حدث تقدم كبير فى حساب المثلثات وظهرت جداول ممتازة للنسب المثلثية. كما شهد هذا القرن أول كتاب رياضيات مطبوع فى أمريكا وكان ذلك عام ١٥٥٦م.

أمثلة من بعض كتب الجبر الأوروبية:

١ ـ جاء فى أحد الكتب المؤلفة فى القرن الثامن مسائل من النوع التالى:

(أ) كلب يطارد أرنباً كان يبعد عنه مسافة ١٥٠ قدما فإذا كان الكلب يقفز ٩ أقدام فى كل مرة يقفز فيها الأرنب ٧ أقدام. كم قفزة يحتاج إليها الكلب ليقتنص الأرنب؟
[إرشاد: حل المعادلة ٩س - ٧س = ١٥٠]

(ب) مات رجل وامرأته على وشك الولادة فكتب فى وصيته أنه إذا أنجبت زوجته ولدا توزع التركة بحيث يرث الابن $\frac{٣}{٤}$ التركة وترث الأرملة $\frac{١}{٤}$ التركة. وأما إذا أنجبت الزوجة بنتا فتوزع التركة بحيث ترث الابنة $\frac{٧}{١٢}$ من التركة وترث الأرملة $\frac{٥}{١٢}$ من التركة. غير أن المرأة أنجبت ولدا وبنتا. فكيف توزع تركة الفقيد؟

٢ ـ وضع فيبوناتسى المسألة التالية فى القرن الثالث عشر:

(أ) كم عدد أزوج الارانب التى يمكن إنجابها من زوج واحد أصلى خلال عام إذا كان كل زوج ينجب كل شهر زوجا

جديدا. وهذا الزوج الجديد يصبح ولودا بداية من الشهر الثاني من ولادته.

[إرشاد: عدد الأزواج فى الأشهر المتتالية فى السنة تتكون كالآتى: ١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ٢١، ٣٤، ٥٥، ...

وتسمى هذه المتتابعة من الأعداد متتابعة فيبوناتسى وبها بعض الخواص الطريفة مثل:

$$ح_{ن+١} \times ح_{ن-١} = (ح_ن)^٢ + (-١)^ن \text{ لكل } ن \geqslant ٢]$$

(ب) إذا كان ٣٠ رجلا يزرعون ألف شجرة فى ٩ أيام ففى كم يوما يزرع ٣٦ رجلا ٤٤٠٠ شجرة [٣٣]

٣ – اثبت انه اذا كان ا ، ب ، جـ ، د ، **اربعة أعداد موجبة فى توال عددى** $\frac{ا+ب}{جـ+د}$ يقع بين $\frac{ا}{جـ}$ ، $\frac{ب}{د}$

٤ ـ فأر موجود فى قمة شجرة ارتفاعها ٦٠ قدما وهناك قط على الأرض فى أسفل الشجرة. فإذا كان الفأر ينزل $\frac{١}{٢}$ قدم كل نهار ويعود صاعدا $\frac{١}{٦}$ قدم بالليل. وكان القط يصعد قدما واحد كل نهار ثم ينزلق إلى أسفل $\frac{١}{٤}$ قدم بالليل. وكانت الشجرة تنمو بمقدار $\frac{١}{٤}$ قدم بين القط والفأر كل نهار وتنكمش $\frac{١}{٨}$ قدم كل ليلة. كم من الزمن يصل فيه القط إلى الفأر؟

٥ ـ حل المعادلة $س^٣ + ٦س = ٢٠$ مستخدما طريقة كاردان.

٦ ـ اتفق أب مع ابنه على أنه إذا حل مسألة حساب حلا صحيحا يعطيه ٨ قروش وإذا حل مسألة خطأ يدفع الابن غرامة قدرها ٥ قروس. وبعد أن حل الابن ٢٦ مسألة حساب كان حسابهما متعادل. فكم مسألة حلها الابن حلا صحيحا؟

عصر التقدم العلمي:

مع بداية القرن السابع عشر وحتى الآن شهدت أوروبا والحضارة الغربية بصفة عامة تطورا مذهلا في العلوم الرياضية بسبب الثورة الصناعية وتعقد حاجات المجتمع وتطوره تطورا لم يسبق له مثيل.

والقرن السابع عشر يعتبر قرنا خصبا في تقدم الرياضيات والعلوم بصفة عامة. ففي هذا القرن كشف نابيير عن اختراعه للوغاريتمات وتطور استخدام الرموز الجبرية وأرسى جاليليو علم الديناميكا وأعلن كبلر عن نظريته في حركة ومسار الكواكب. وارتاد ديسارجس وباسكال مجالات جديدة من الهندسة. وخاصة الهندسة الاسقاطية وقدم ديكارت الهندسة التحليلية ووضع فرمات أسس نظرية الأعداد وأضاف هيجنز وباسكال إلى نظرية الاحتمال. ومع نهاية هذا القرن كان الطريق ممهدا ومعدا لظهور التفاضل والتكامل على يدى نيوتن وليبنتز.. ولقد كان هذا التقدم والانطلاق في البحث الرياضي نتيجة الاستقرار والتقدم السياسي والاجتماعي والاقتصادي والصناعي الذي ساد أوروبا في ذلك العصر والذي انتقل فيه مركز النشاط الرياضي من إيطاليا في الجنوب إلى فرنسا وإنجلترا في الشمال. لقد شهد هذا القرن ابتكارات وبحوث رياضية كثيرة بالدرجة التي يمكن القول عنها أن القرن السابع عشر كان بداية الرياضيات الحديثة إذ أن التقدم الرياضي جاء متسارعا بعد ذلك حتى يومنا هذا. وفيما يلي نعرض بعض معالم التقدم في الرياضيات مع التركيز على الجبر.

١ ـ ابتكر نابيير اللوغاريتمات والتي هي في جوهرها طريقة لتيسير عمليات الضرب والقسمة واستخراج الجذور عن طريق عمليات الجمع والطرح، كما قدم آلة حسابية تسمى قضبان نابيير. وقد نشر نابيير وصفا لقانون اللوغاريتمات ثم نشر هو وعالم آخر يدعى برجز Briggs جداول اللوغاريتمات العامة (للأساس ١٠) والتي تستخدم حتى الآن.

وينافس نابير فى اكتشاف اللوغاريتمات رياضى سويسرى يدعى برغى Burgi (١٥٣٢ - ١٦٣٢) الذى نشر جداولا للوغاريتمات عام ١٦٢٠ بعد ست سنوات من إعلان نابيير عن اكتشافه. وعلى الرغم من أن كلمة لوغاريتم تعنى فى الأصل عدد على شكل نسبة إلا أنها الآن تستخدم بمعنى قوة، فعندما نقول أن $ا = ب^{ن}$ فإن الذى يكافئ ن هو لوغاريتم ا للأساس ب

[مثلا : لو$_{١٠}$ ١٠٠ = ٢ تعنى أن ١٠٠ = $(١٠)^{٢}$]

٢ ـ قدم الرياضى الانجليزى هاريوت معالجته لنظرية المعادلات حتى الدرجة الرابعة كما قدم حلولا عددية. وقد عالج أيضا علاقة الجذور بالمعاملات وتكوين معادلات من معادلات أخرى ترتبط جذورها بجذور الأولى بعلاقات معينة. وقد كان أول من استخدم علاقات أكبر من وأصغر من بالرموز المعروفة حاليا > ، < . كما ينسب إليه اكتشاف القاعدة التى تقول بأن كثيرة الحدود من درجة ن يكون لها ن من الجذور.

٣ ـ قدم أوتريد Oughtred العديد من الرموز الجبرية مثل :

علامة الضرب (×) ، رمز التناسب (::) الفرق (ن) وكان هاريوت يستخدم النقطة (·) رمزا لعملية الضرب كما استخدم ليبنتز أيضا النقطة كرمز لعملية الضرب معترضا على الرمز (×) حتى لا يختلط مع حرف x وأول من استخدم الرمز (÷) لعملية القسمة كان الرياضى السويسرى ران Rahn . وقد ابتكر أوتريد أول مسطرة حاسبة لوغاريتمية (عام ١٦٢٢) وقد اشتغل نيوتن فى تطوير المسطرة الحاسبة ولكن الصورة الحديثة للمسطرة الحاسبة الحالية تعود إلى الرياضى الفرنسى ماناهايم (١٨٣١ ـ ١٩٠٦) .

٤ ـ قدم جاليليو الروح العصرية للعلم على أنه تناغم بين النظرية والتجريب. وقد وضع جاليليو أسس ميكانيكا الحركة التى بنى عليها نيوتن علم الميكانيكا بعد ذلك، كما درس مسارات الأجسام الساقطة والمقذوفات، كما ابتكر أول ميكروسكوب حديث. وربما كانت لدى

الاسلام مصر للطباعة

جاليليو بعض الأفكار عن المجموعات اللانهائية والتى عالجها بعد ذلك كانتور فى القرن التاسع عشر فى نظرية المجموعات. وقد حوكم جاليليو بسبب أفكاره العلمية التى اعتبرت خروجا عن الدين فى ذلك الوقت.

وإلى جانب جاليليو كان هناك الفلكى الشهير كبلر الذى وضع قوانينه المعروفة فى حركة الكواكب عام ١٦٠٩ ثم ١٦١٩.

ويعود ألى كبلر فكرة أن المستقيمين المتوازيين يتقابلان فى اللانهاية، كما افترض بوجود النقط المثالية والخط المثالى. ورغم عبقرية كبلر إلا أن سوء الحظ حالفه فى نهاية حياته إلى أن مات عام ١٦٣٠.

وبعد وفاة كبلر بتسع سنوات ظهرت فى باريس وثيقة رياضية عظيمة عن القطاعات المخروطية كتبها مهندس فرنسى هو ديسارجاس (١٥٩٣ - ١٦٦٢) واشتغل ديسارجاس هذا بالهندسة الاسقاطية وسطوح الدرجة الثانية.

٥ - ومن معاصرى ديسارجاس كان الرياضى الفرنسى باسكال الذى اكتشف وهو فى سن الثانية عشر بعض النظريات الهندسية وفى سن السادسة عشر كتب بحثا عن القطوع المخروطية وبعد ذلك بسنوات قليلة ابتكر آلة حاسبة للجمع (عام ١٦٤٢) ثم اتجه بعد ذلك إلى دراسة الميكانيكا والفيزياء. وينسب إلى باسكال المثلث العددى الذى يربط بين معاملات ذات الحدين والذى استخدمه أيضا فى الاحتمالات. وكانت آخر أعمال باسكال عن المنحنى الذى يسمى السيكلويد. وفى أواخر حياته أصيب بداء التزمت الدينى الذى منعه من استمرار أبحاثه وحتى من معالجة مرضه فقد كان ينتمى إلى جماعة دينية متطرفة تقول بأن العلم يحجب الانسان عن الله.

٦ - زاوج ديكارت (١٥٩٥ - ١٦٥٠) بين الهندسة والجبر وأنتج

الاسلام مصر للطباعة

لنا الهندسة التحليلية حيث عبر عن النقاط فى المستوى بإحداثيين (عددين) ثم عالج القضايا الهندسية جبريا فالمستقيم هو معادلة مثل ا س + ب ص = حـ والدائرة التى مركزها (٠،٠) ونصف قطرها ٥ تكون بالصورة س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ... وهكذا. ويقال أن فكرة الهندسة التحليلية جاءت ألى ديكارت فى أحد أحلامه. وفى راوية أخرى أن الذى أوحى له بذلك ذبابة كانت تتحرك على سقف غرفته وحاول تتبع مسارها بالنسبة لأحد أركان الغرفة وبالنسبة لحائطين متجاورين حول هذا الركن.

وقد تطورت الهندسة التحليلية بعد ذلك وانتقلت من المستوى إلى الفراغ ثلاثى البعد ثم إلى فراغات ذات أبعاد عديدة على يدى علماء مثل برنولى وكايلاى، وجراسمان وريمان.

وقد وضع ديكارت القاعدة المسماة بقاعدة الاشارات لتحديد طبيعة جذور المعادلات.

٧ ـ اشتغل فرمات (١٦٠١ - ١٦٦٥) بالهندسة التحليلية فى نفس الوقت الذى كان يشتغل فيه ديكارت فى نفس الموضوع. وقد اقترح فرمات الكثير من المنحنيات معرفا إياها بمعادلات جبرية. ويعتبر فرمات مؤسس نظرية الأعداد الحديثة. ومن بين أعماله الجبرية الهامة اشتغاله بمشكلة الأعداد الأولية التى وضع فيها بعض النظريات مثل :

- إذا كان ن عددا أوليا وكان ا عددا أوليا بالنسبة إلى ن فإن (ا$^{ن-١}$ - ١) يقبل القسمة على ن. فمثلا (٢)$^{٥-١}$ - ١ = ١٥ تقبل القسمة على ٥. وتعرف هذه باسم نظرية فرمات الصغير.
- كل عدد أولى فردى يمكن التعبير عنه كفرق بين مربعين بطريقة وحيدة. فمثلا :

٥ = ٩ - ٤ ، ٣ = ٤ - ١ ، ١١ = ٣٦ - ٢٥

– العدد الأولى الذى على الصورة ٤ن + ١ يمكن التعبير عنه كمجموع مربعين.

فمثلا ٥ = ٤ + ١ ، ١٣ = ٩ + ٤ ، ١٧ = ١٦ + ١

– يوجد حل وحيد ينتمى للأعداد الصحيحة للمعادلة $س^٢ + ٢ = ص^٣$ وحلان صحيحان للمعادلة $س^٢ + ٤ = ص^٣$
[(٥،٣) للأولى، (٢،٢)، (١١،٥) للثانية]

– لا توجد حلول تنتمى للأعداد الصحيحة الموجبة للمعادلة $س^ن + ص^ن = ع^ن$ عندما ن > ٢ . **وقد شغل هذا الموضوع العديد من الرياضيين حتى القرن العشرين .**

٨ – وضع نيوتن قوانين الحركة المعروفة واشتغل فى مجالات رياضية متعددة كان من أهمها ابتكار حساب التفاضل والتكامل ومفكوكات ذات الحدين وحل المعادلات عدديا. ويروى عن نيوتن أنه كان يقضى ١٨ أو ١٩ ساعة يوميا فى الكتابة والدراسة.

٩ – كان ليبنتز منافسا لنيوتن فى اكتشاف التفاضل والتكامل. كما أنه اشتغل بمبادئ المنطق الرمزى الذى استكمله جورج بوول Boole فى القرن التاسع عشر ثم **هوايتهد** وبراتراند راسل فى القرن العشرين، وقد طور ليبنتز الكثير من الرموز الرياضية. ويعتقد أن نظرية المحددات نشأت على يدى ليبنتز فى معرض حله للمعادلات الآنية كما عمم نظرية ذات الحدين إلى مفكوكات لكثيرات الحدود

١٠ – اشتغل معظم الرياضيين فى القرن الثامن عشر فى معالجة التفاضل والتكامل والاستفادة به كأداة رياضية قوية لحل كثير من المشكلات المتعلقة بالصناعة وعلوم الفيزيائيين والمهندسين ومن الرياضيين فى هذا القرن ماكلورين وأويلر ولاجرانج ودى موافر

وينسب إلى أويلر ابتداعه للرمز (f(X) للدلالة على الدالة وتبنيه لاستخدام الرمز (π) للدلالة على العدد الذى نرمز له فى الكتب العربية

بالرمز ط والرمز ∑ (سيجـا) للجمع والرمز i للدلالة على العدد التخيلى . كما ينسب إليه اكتشاف العلاقة الغريبة التى تربط بين الأعداد الرياضية الشهيرة :

صفر ، ١ ، ط ، e (هـ) ، ت :

وهى $e^{-ط}$ + ١ = صفر

وقد اشتغل دى مواڤر فى الاحصاء، والاحتمال كما وضع النـظرية المعروفة باسمه وهى :

(حتا س + ت حا س)ن = حتا ن س + ت حا ن س

ومما يروى عن دى مواڤر أنه لاحظ أن عدد ساعات نومه تتـزايد بانتظام بمقدار ¼ ساعة كل يوم ومن ذلك استنتج أنه سـوف يمـوت عندما تصل ساعات نومه إلى ٢٤ ساعة فى اليوم وهذا ما حدث فعلا حين توفى دى مواڤر عام ١٧٥٤م.

١١ ـ تميز القرن التاسع عشر بوضع الأسس المنطقية للرياضيات ومحاولة إعادة تنظيمها على أسس قوية كما كانت هناك التعميمـات الرياضية والدراسات المجردة للعدد وظهور الجبر المجرد أو الحديث. وفى هذا القرن نجد جاوس يعمل فى الأعداد المركبة وهاملتون يبحث فى مد فكرة المتجهات إلى فكرة الرباعيات المجردة ونشر جـراسمان كتابا يحتوى على بعض أنواع الجبر العامة والفراغات النوعية (ذات الأبعاد المتعددة) وابتكر كايلاى المصفوفات وظهر الجبـر البـوولى واشكال فن لتوضيح الجبر البوولى من مجموعات ومنطق كما تمـت دراسة الأعداد الحقيقية دراسة قوية على يـدى ديـدكند ودراسـة اللانهائيات على يدى كانتور (١٨٤٥ – ١٩١٨) والذى أطلق على هذا المفهوم مصطلحا ألمانيا مناظرا كما أنه عالج نـظرية المجمـوعات معالجة مجردة.

وكان من أهم نظريات الجبر التى اكتشفت فى هذا القـرن هـى نظرية الزمر Groups وقد ساهم فى هذه النظرية كثيرون مثـل سرڤوا،

وجاوس، وأبل، وجالوا، وكوشى، وكايلاى، وجوردان، وسايلو، ولى (Lie).

وقد ربط كلاين فى عام ١٨٧٢ بين الهندسة وبين نظرية الزمر.

١٢ ـ ظهرت الهندسات التى تخالف نظرية التوازى عند أقليدس والتى تعرف باسم الهندسات اللاإقليدية على يدى جاوس ولوباتشفسكى الروسى (حوالى عام ١٨٢٦م) وبولياى المجرى (عام ١٨٣٢م)، وريمان الألمانى (حوالى ١٨٦٠م) وكان هذا قمة التجريد فى الرياضيات والبعد بها عن المحسوسات الذى بدأ به إقليدس حيث كانت هندسته تعتبر تجريدا مثاليا للعالم الفيزيائى.

١٣ ـ ظهر علم التوبولوجى فى القرن التاسع عشر على يدى رياضيين مثل ليستنج وموبياس، وبوانكريه ودى مورجان.

١٤ ـ تطور علم المنطق الرياضى على يدى جورج بول ودى مورجان وبيرس الذى وضع جداول الصواب والخطأ عام ١٨٨٥ وشرويدر وفريجه وبيانو الذى كان يحاول التعبير عن كل الرياضيات بواسطة حساب المنطق.

١٥ ـ شهد القرن العشرون ـ وما زال ـ تطورات عديدة فى الرياضيات تتصف بالتجريد والبناء المنطقى لأسس الرياضيات. وظهر علم فلسفة أصول الرياضيات، وحاول بعض الرياضيين إعادة صياغة الرياضيات كلها على أسس منطقية بأسلوب المسلمات وكمادة موحدة. ورغم التجريد الشديد والمعالجات الشكلية فقد ظهرت للرياضيات قديمها وحديثها تطبيقات متطورة ليس فقط فى علوم المهندسين والتكنولوجيين، بل أيضا فى العلوم الاجتماعية والاقتصادية والسلوكية مثل البرمجة الخطية واستراتيجية الألعاب واتخاذ القرارات وتحليل المعلومات والحاسبات الالكترونية.

ومما يجدر الاشارة إليه أنه على الرغم من أن التطورات فى العلوم الرياضية فى القرن العشرين مرتبطة بالحضارة الغربية إلا أن هنـاك رياضيين كثيرين ممن ساهموا فى تطوير الرياضيات ينتمون إلى معظم أنحاء العالم ليس فقط فى أوروبا الشرقية مثـل الاتحـاد السـوفيتى والمجر وبولندا، بل أيضا من دول اليابان ودول العالم الثـالث مثـل الهند والصين ومصر وغيرها.

إن التقدم العلمى السائد اليوم هو نتاج التداخل بين الحضارات والتكامل بين العلماء من أجل سعادة البشرية جمعاء.

الاسلام مصر للطباعة

المواصفات	
عدد الصفحات	١٦٠ صفحة
عدد الملازم	١٠ ملازم
	$\frac{١}{١٦}$ ٧٠ x ١٠٠
ورق المتن	٧٠ جرام أبيض
طبع المتن	لـــون واحد
ورق الغلاف	١٨٠ جرام كوشية
طبع الغلاف	لـــون واحد

شركة الإسلام مصر للطباعة
طبعة ١٩٩٩ـ ٢٠٠٠